令和５年度第２次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　選　抜

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページあります。
3. 試験時間は，９：００～１１：００です。
4. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚

5. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 下書きは，問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

$\boxed{問題\quad 1}$

$\tan x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ と表す。次の問いに答えよ。

(1) 2 変数関数 $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ について, 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \tan^{-1} x\, dx$ を求めよ。

(3) xy 平面において, 直線 $x=0$, $y=1$, $y=x$ で囲まれた閉領域を D とおく。このとき, 2 重積分

$$\iint_D \frac{2}{1+y^2} dxdy$$

を求めよ。

問題 2

行列 $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 3 \\ -9 & 2 & 3 \\ -18 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ。

(1) A の固有値をすべて求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ。

(3) 次の条件を満たす 3 次正方行列 Q が存在するならば一つ求め, 存在しないならばそのことを示せ。

$$QQ^T = I_3 \quad \text{かつ} \quad Q^T AQ \ \text{は対角行列}$$

ここで, Q^T は Q の転置行列を, I_3 は 3 次単位行列をそれぞれ表す。

問題　3

n を正の整数とし, 複素数を成分とする n 次正方行列の全体を $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ とする。さらに,

$$\mathrm{U}(n) = \{\, A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = AA^* = I_n \,\},$$

$$\mathrm{SU}(n) = \{\, A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1 \,\}$$

とする。ここで, A^* は A の共役転置行列であり, I_n は n 次単位行列である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{U}(n)$ は行列の積に関して群になることを示せ。

(2) $\mathrm{SU}(n)$ は $\mathrm{U}(n)$ の正規部分群になることを示せ。

(3) $\mathrm{U}(n)$ の $\mathrm{SU}(n)$ による剰余群 $\mathrm{U}(n)/\mathrm{SU}(n)$ は, $\mathrm{U}(1)$ と群として同型であることを示せ。

問題 4

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 集合 W, 写像 $f : X \to W$ に対して,

$$\mathcal{O}_W = \{A \subset W \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_X\}$$

とおくと, $\mathcal{O}_W$ は W 上の位相となることを示せ。

(2) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を連続写像とする。このとき, $g \circ f : X \to Z$ も連続写像であることを示せ。

(3) $f : X \to Y$ を連続写像とする。さらに, X がコンパクトであるとき, $f(X)$ が Y のコンパクト部分集合であることを示せ。

問題　5

正の整数 n に対し, $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とする。写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x,y,z,w) = (x^2+y^2, z^2+w^2, xz+yw), \quad (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$$

によって定義する。また, f による点 $(1,1,0) \in \mathbb{R}^3$ の逆像 $f^{-1}(1,1,0)$ を M とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) f の $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ におけるヤコビ行列 $(Jf)_{(x,y,z,w)}$ を求めよ。

(2) f の $(x,y,z,w) \in M$ におけるヤコビ行列 $(Jf)_{(x,y,z,w)}$ の階数は 3 であることを示せ。

(3) M は $\mathbb{R}^4$ のコンパクト部分集合であることを示せ。

問題 6

次の線形計画問題について考える。

$$
(\mathrm{P}) \begin{cases} \text{最小化} & 190x_1 + 210x_2 + 120x_3 \\ \text{制約条件} & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqq 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqq 3 \\ & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0 \end{cases}
$$

次の問いに答えよ。

(1) 問題 (P) を連立 1 次方程式の形と変数の非負条件を制約に持つ標準形で表せ。また, その標準形の実行可能基底解をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた標準形に対する双対問題を記述せよ。

(3) (2) で求めた双対問題をシンプレックス法で解き, 最適解と最適値を求めよ。ただし, シンプレックス法の計算過程も記述すること。