令和５年度第１次募集（令和４年１０月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　選　抜

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページあります。
3. 試験時間は，９：００～１１：００ です。
4. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚

5. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 下書きは，問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

問題　1

次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx$ を求めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx$ とおく。3 以上の自然数 n に対して I_n を I_{n-2} を用いて表せ。また I_5 の値を求めよ。

問題　2

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値を求めよ。

(2) A が対角化可能であれば対角化を行い，不可能であればその理由を述べよ。

(3) $n \geqq 3$ をみたす自然数 n に対して，$A^n = A^{n-2} + A^2 - E$ を示せ。ただし，E は3次単位行列とする。

(4) 自然数 n に対して，A^n を求めよ。

問題　3

S_1, S_2 を空でない集合とし，d_1, d_2 をそれぞれ S_1, S_2 上の距離関数とする。また，f を距離空間 (S_1, d_1) から (S_2, d_2) への写像とし，a を S_1 の 1 点とする。このとき以下の条件 (i), (ii), (iii) は同値であることを示せ。

(i) 任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ が存在して，$d_1(x, a) < \delta$ をみたす S_1 の任意の点 x に対して $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$ が成り立つ。

(ii) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を点 a に収束する (S_1, d_1) の任意の点列とする。このとき (S_2, d_2) の点列 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は点 $f(a)$ に収束する。

(iii) 点 $f(a)$ を含む (S_2, d_2) の任意の開集合 V に対して，点 a を含む (S_1, d_1) の開集合 U が存在して U は $f^{-1}(V) = \{x \in S_1 \mid f(x) \in V\}$ に含まれる。

問題　4

有限群 G に対して，$x \in G$ を含む共役類を $C(x)$ とする。G の共役類による類別 $G = C(x_1) \cup \cdots \cup C(x_r)$ に対して，G の位数を各共役類の位数の和として表した等式 $|G| = |C(x_1)| + \cdots + |C(x_r)|$ を G の類等式という。例えば，位数 3 の巡回群 C_3 の類等式は $3 = 1+1+1$ であり，3 次対称群 S_3 の類等式は $6 = 1+3+2$ である。次の問いに答えよ。

(1) 位数 n の巡回群 C_n の類等式を求めよ。

(2) n 次対称群 S_n の元 σ と σ' が共役であるためには，σ と σ' が同じ型をもつことが必要十分であることを示せ。ただし，$\sigma \in G$ を互いに共通の文字を含まない巡回置換の積 $\sigma = (i_1 \cdots i_s)(j_1 \cdots j_t) \cdots (k_1 \cdots k_u)$　$(s \geqq t \geqq \cdots \geqq u \geqq 1)$ に表したとき，$(s, t, \ldots, u)$ を σ の型という。

(3) 4 次対称群 S_4 と 5 次対称群 S_5 の類等式をそれぞれ求めよ。

(4) 4 次交代群 A_4 と 5 次交代群 A_5 の類等式をそれぞれ求めよ。

(5) 4 次交代群 A_4 には位数 6 の部分群は存在しないことと，5 次交代群 A_5 の正規部分群は $\{1\}$ と A_5 のみであることを示せ。

問題　5

有限個の頂点をもつグラフに対する次の問いに答えよ。

(1) グラフ G の直径 $\mathrm{diam}(G)$ および半径 $\mathrm{rad}(G)$ の定義を述べよ。

(2) n 頂点からなる完全グラフ，閉路をそれぞれ K_n, C_n で表す。また，P_n は辺数が n である道を表すものとする。このとき，K_n, C_n, P_n のそれぞれに対して，その直径及び半径を求めよ。

(3) 任意のグラフ G に対して，$\mathrm{rad}(G) \leqq \mathrm{diam}(G) \leqq 2\,\mathrm{rad}(G)$ が成り立つことを示せ。

問題　6

次の線形計画問題について考える。

$$
(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{lllllll}
\text{最小化} & -x_1+8x_2+10x_3+3x_4 & & & & & \\
\text{制約条件} & -2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & & = & 4 \\
 & & 2x_2 & +x_3 & +x_4 & \geqq & -3 \\
 & x_1 \geqq 0, & x_2 \geqq 0, & x_3 \geqq 0, & x_4 \geqq 0 & &
\end{array}\right.
$$

次の問いに答えよ。

(1) 問題 (P) を連立 1 次方程式の形と変数の非負条件を制約に持つ標準形 (LP) に変形し，問題 (LP) の実行可能基底解をすべて求めよ。

(2) 問題 (LP) をシンプレックス法で解き，問題 (LP) の最適解と最小値を求めよ。

(3) 問題 (LP) に対する双対問題 (D) を記述せよ。

(4) (3) で求めた問題 (D) の実行可能解の領域を図示して問題 (D) の最適解と最大値を求めよ。