令和５年度第１次募集（令和４年10月入学含む）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　選　抜

数理物質科学

物理学

A1

# 専門科目（物理学）

**注意事項**

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で５ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

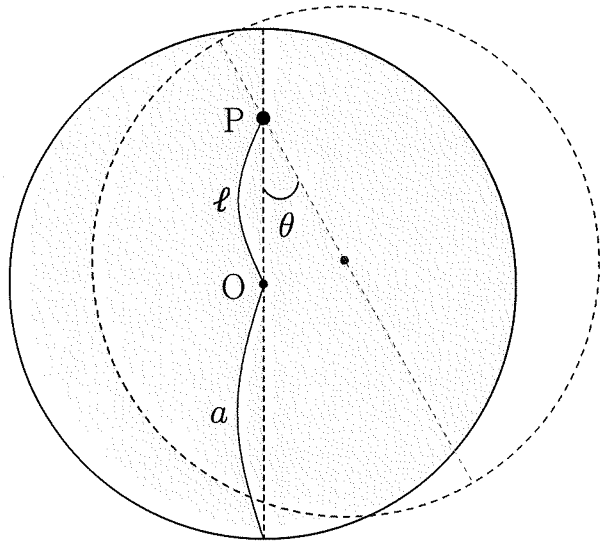
4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，120分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

## [1]

半径 $a$ で一様な密度を持つ質量 $M$ の薄い円板の運動を考える。図のように，円板の中心 O から距離 $\ell\ (< a)$ にある点 P を通る紙面に垂直な軸が水平な状態で固定されており，円板は軸に対して垂直な面内（紙面内）をなめらかに回転できる。中心 O の点 P に対する鉛直下向きからの角度を $\theta$ として，以下の問いに答えよ。ただし，重力加速度の大きさを $g$ とし，空気抵抗は無視できるものとする。




(1) 図のように，円板を角度 $\theta$ だけ傾けたときの位置エネルギーを求めよ。ただし，位置エネルギーは $\theta = 0$ のときを基準とする。

(2) 円板の軸周りの慣性モーメントが $M\left(\dfrac{a^2}{2} + \ell^2\right)$ となることを示せ。

(3) $\dot{\theta}$ を用いて，円板の運動エネルギーを表せ。ここで $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ である。

(4) 円板の運動に対するラグランジアン $L$ を書け。

(5) $\theta$ の共役運動量を書け。

(6) 円板を微小角度 $(|\theta| \ll 1)$ だけ傾けて，静かに手を離した。$\theta$ に対するラグランジュの運動方程式を書き，円板の振動する周期を求めよ。

(7) 円板の振動する周期が最も短くなるときの距離 $\ell$ を求めよ。

[2]

（I）と（II）に答えよ。ただし，$i$ は虚数単位，$\varepsilon_0$ は真空の誘電率，$c$ は真空中の光の速さ，$t$ は時間，$\vec{r}=(x,y,z)$ は位置ベクトルである。

（I）真空中に静電場があり，その静電ポテンシャルは $\phi=\dfrac{Ae^{-ar}}{r}$ であるとする。ただし，$A$ と $a$ は正の定数，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) $r\neq 0$ における $\vec{\nabla}r$ を求めよ。

(2) $r\neq 0$ における電場が $\vec{E}=\dfrac{Ae^{-ar}(ar+1)\vec{r}}{r^3}$ であることを示せ。

(3) 原点を中心とする半径 $r$ の球の内部の電気量 $Q$ を求めよ。

(4) $r\neq 0$ における電荷密度 $\rho$ を求めよ。

（II）電荷も電流もない真空中を伝わる電磁波があり，その電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ は

$$\begin{cases}\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)=(E_0\sin k(z-ct),E_0\cos k(z-ct),0)\\ \vec{B}=(B_x,B_y,B_z)=(B_1\cos k(z-ct),B_2\sin k(z-ct),0)\end{cases}$$

である。ただし，$E_0$ と $k$ は正の定数，$B_1$ と $B_2$ は0でない定数である。以下の問いに答えよ。

(1) $E_x+iE_y=C_0e^{if(t,z)}$ を満たす複素定数 $C_0$ と実関数 $f(t,z)$ をそれぞれ求めよ。ただし，$f(t,z)$ は $f(0,0)=0$ を満たすものとする。

(2) この電磁波の偏光（偏波）の状態について，次のア～エから正しいものを1つ選び，記号を書け。ただし，それを選んだ理由も簡潔に述べること。

ア．円偏光　　イ．楕円偏光　　ウ．直線偏光　　エ．偏光していない

(3) $\vec{E}$ と $\vec{B}$ は次の方程式を満たす。

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

このとき，$B_1$ と $B_2$ をそれぞれ，$\varepsilon_0$，$E_0$，$c$，$k$ のうち必要なものを用いて表せ。ただし，解答にあたっては計算の過程も簡潔に示すこと。

[3]

質量 $m$ の単原子分子 $N$ 個からなる古典理想気体が，体積 $V$ の容器に入れられ，温度 $T$ の熱平衡状態に保たれている。ただし，容器の大きさは十分に小さく，重力の影響は無視できるとする。ボルツマン定数を $k_B$，プランク定数 $h$ に対し，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とし，以下の問いに答えよ。なお，必要であれば，問題文の後にあるスターリングの公式，およびガウス積分の公式を用いてよい。

(1) 1 粒子の分配関数が $Z_1 = V\left(\dfrac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$ となることを示せ。

(2) $N$ 粒子系の分配関数，およびヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。

(3) $N$ 粒子系の内部エネルギー，および定積比熱を求めよ。

質量 $m$ の単原子分子 $N$ 個からなる古典理想気体が，地表から鉛直上向きに無限に延びる筒の中に入れられ，温度 $T$ の熱平衡状態に保たれている。ただし，筒の断面積 $A$ は一定であるとする。また，分子にはたらく重力は高さによらず一定とし，重力加速度の大きさを $g$ とする。

(4) $N$ 粒子系の分配関数を求めよ。

(5) $N$ 粒子系の内部エネルギー，および比熱を求めよ。

(6) (5) で求めた比熱が，(3) で求めた定積比熱より大きくなる理由を簡潔に述べよ。

**スターリングの公式**

$$\log N! \simeq N\log N - N$$

ただし，$N$ は 1 より十分に大きな整数とする。

**ガウス積分の公式**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ただし，$a$ は $a > 0$ を満たす定数とする。

## [4]

質量 $m$，角振動数 $\omega$ の一次元調和振動子の量子力学を考える。この系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

で与えられる。ここで，$\hat{x}$ は位置演算子，$\hat{p}$ は運動量演算子であり，交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす。$h$ をプランク定数として $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ である。いま，演算子 $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ が成立することを示せ。

(2) 個数演算子を $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ とする。$\hat{H}$ を $\hat{N}$ を用いて書け。

(3) $\hat{N}$ の固有値を $n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とし，対応する固有ベクトルを $|n\rangle$ とする。すなわち，

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

が成り立つ。ここで，固有ベクトルは正規直交条件 $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$ $(n, m = 0, 1, 2, \cdots)$ を満たす。$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ は，$c_-, c_+$ を正の定数として

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad \hat{a}|n\rangle = c_-|n-1\rangle \quad (n \geq 1 \text{ のとき}), \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = c_+|n+1\rangle \quad (n \geq 0 \text{ のとき})$$

を満たす。$c_- = \sqrt{n}$, および $c_+ = \sqrt{n+1}$ を示せ。

(4) 以下に示す期待値を求めよ。

(i) $\langle n|\hat{x}|n\rangle$

(ii) $\langle n|\hat{p}|n\rangle$

(iii) $\langle n|\hat{x}^2|n\rangle$

(iv) $\langle n|\hat{p}^2|n\rangle$

(5) 位置と運動量の不確かさを $\Delta x = \sqrt{\langle n|\hat{x}^2|n\rangle - (\langle n|\hat{x}|n\rangle)^2}$ と $\Delta p = \sqrt{\langle n|\hat{p}^2|n\rangle - (\langle n|\hat{p}|n\rangle)^2}$ とする。$\Delta x \Delta p$ を求めよ。

(6) $\Delta x \Delta p$ が最小となる $|n\rangle$ に対して, 期待値 $\langle n|\hat{H}|n\rangle$ を求めよ。