

平成28年度第2次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一般入試

材料生産システム専攻
機能材料科学コース（物性系）

B1

専門科目（材料科学（物性系））

注意事項

- 1 この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は、表紙を含めて全部で8ページある。
- 3 解答用紙にも注意事項が記載されているので、その指示に従うこと。
解答は、すべて指定された解答用紙に記入すること。
指定された解答用紙の中に自由に記入してよいが、解答した問題が分かるようにすること。裏面に解答する場合も、その旨、表面に明記すること。
- 4 受験番号は、各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。
- 5 解答時間は、180分である。
- 6 下書きは、問題冊子の余白を使用すること。

[I] 量子物理学に関する以下の設問 (1) と (2) に答えよ。

(1) 質量 m , 振動数 Ω の 1 次元調和振動子のシュレーディンガー方程式は,

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \Omega^2 x^2,$$
$$\hat{H}_0 \varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x)$$

である。波動関数 $\varphi_n(x)$ は, $\alpha = \sqrt{m\Omega/\hbar}$, $\xi = \alpha x$ として,

$$\varphi_n(x) = N_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right) H_n(\alpha x),$$
$$N_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

である。ここに, N_n は規格化定数, $H_n(\xi)$ はエルミート多項式である。
以下の問 ① ~ ④ に答えよ。

- ① 基底状態の波動関数 $\varphi_0(x)$ を求め, その概形を図示せよ。
- ② $\varphi_0(x)$ をシュレーディンガー方程式に代入し, 基底状態のエネルギー E_0 を求めよ。
- ③ E_0 がゼロではない理由を述べよ。
- ④ 波動関数の規格直交条件から, 次の関係式,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_m(\xi) H_n(\xi) d\xi = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}$$

が成り立つことを示せ。ここに, δ_{mn} はクロネッカーのデルタである。

[次ページへ続く]

(2) 前設問 (1) のハミルトニアン \hat{H}_0 に摂動ポテンシャル,

$$\hat{W} = \frac{1}{2}m\omega x^2 \quad (\omega \ll \Omega)$$

が加わり, 全ハミルトニアン \hat{H} は,

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{W} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\end{aligned}$$

となった。以下の問 ⑤ ~ ⑦ に答えよ。

⑤ 前設問 (1) ② を参考にして, ハミルトニアン \hat{H} に対する基底状態のエネルギー ϵ_0 を求めよ。

⑥ 1 次の摂動エネルギー ΔE_0 は,

$$\Delta E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^*(x) \hat{W} \varphi_0(x) dx$$

で与えられる。 ΔE_0 を求めよ。必要であれば次の公式,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^3}$$

を用いよ。

⑦ 問 ⑤ で求めた ϵ_0 を $z = (\omega/\Omega)^2$ の 1 次の項までテイラー展開し, 1 次の摂動論の結果と一致することを示せ。

[II] 熱・統計物理学に関する以下の設問 (1) と (2) に答えよ。ただし、ボルツマン定数を k_B とする。

(1) 多粒子系のミクロ・カノニカル分布について考える。全エネルギーを E 、状態数を $W(E)$ として、以下の問①～③に答えよ。

- ① 等重率の原理を仮定して、全エネルギー E をもつ特定の一つの状態が実現する確率を答えよ。
- ② エントロピーを $W(E)$ を用いて表せ。
- ③ 接触した2つの系の熱平衡状態とはどのような状態か。「熱流」、「エントロピー」および「温度」の語を用いて説明せよ。

(2) 区別のない N 個の粒子からなる系で、それぞれの粒子は ϵ_0 、 $-\epsilon_0$ の2つのエネルギー状態しか取り得ないとする。以下の問①～⑥に答えよ。

- ① 全エネルギー E を、整数 M を用いて $E = M\epsilon_0$ とおく。 ϵ_0 状態、 $-\epsilon_0$ 状態を占める粒子数を N_+ および N_- とするとき、 N_{\pm} を N 、 M を用いて表せ。
- ② 全エネルギーを E とする状態数 W を、 N 、 N_{\pm} を用いて表せ。
- ③ N および N_{\pm} は十分大きな数とし、スターリングの公式 $\log N! = N \log N - N$ が適用できるものとする。このとき、エントロピーを M (すなわち E/ϵ_0) の関数として求めよ。
- ④ 前問③のエントロピーから、温度 T と M の間に以下の関係式が導かれることを示せ。

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{2\epsilon_0} \log \frac{N - M}{N + M}$$

- ⑤ 前問④の関係式により、全エネルギー E を温度の関数として求めよ。
- ⑥ 低温極限および高温極限の全エネルギーの値をそれぞれ答えよ。

[Ⅲ] 半導体に関する以下の設問 (1) と (2) に答えよ。

(1) 真性半導体での電子濃度 n と正孔濃度 p は、それぞれ $n = N_c e^{-(E_c - E_F)/kT}$ および $p = N_v e^{-(E_F - E_v)/kT}$ と表せる。ここで、 N_c および N_v はそれぞれ伝導帯および価電子帯の有効状態密度、 E_c および E_v はそれぞれ伝導帯下端および価電子帯上端のエネルギー、 E_F はフェルミ準位のエネルギー、 k はボルツマン定数、 T は温度である。以下の問①～⑤に答えよ。

- ① E_F が、 E_c 、 E_v 、 N_c および N_v を用いた式で表せることを示せ。
- ② 伝導帯下端 E_c と価電子帯上端 E_v を実線 (————) で、フェルミ準位 E_F を一点鎖線 (- · - · - · -) で表すことで、真性半導体のエネルギー帯図を描け。なお、伝導帯上端と価電子帯下端は描かなくて良い。
- ③ 電子濃度 n が $\sqrt{N_c N_v}$ に比例することを示す関係式を導け。
- ④ 禁制帯幅の大きさに対して、電子濃度がどのように変化するかを説明せよ。

⑤ 図1は電子濃度 n の温度に対する変化を示している。なお、縦軸は電子濃度の対数で、横軸は温度の逆数である。点Aと点Bの2点の座標から、禁制帯幅を eV の単位で求めよ。導出過程も記述せよ。ただし、 N_c および N_v の温度依存性は無視できるものとし、 k は 8.6×10^{-5} eV/K、 $\log_{10} e$ は 0.43 とする。

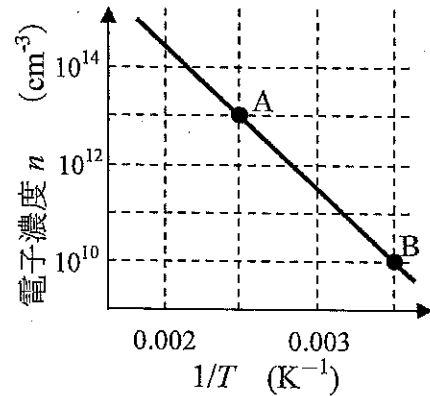


図1. 電子濃度 n の温度依存性

(2) pチャネルデプレッション形の接合型電界効果トランジスタ (JFET) の構造の断面概略モデルと、その通常動作のための配線の様子の一部を図2に示す。また、図3は、ゲート電圧 V_G (ゲート-ソース間電圧: $V_G > 0$) の大きさが一定のときのドレーン電圧 V_{DS} (ドレーン-ソース間電圧: $V_{DS} \leq 0$) の大きさに対するドレーン電流 I_D の大きさの依存性を示しており、点A、点B、点Cおよび点Dのそれぞれは、 $V_{DS} = 0$, $0 > V_{DS} > V_P$, $V_{DS} = V_P$ および $V_P > V_{DS}$ の場合に対応している。ここで、 V_P はピンチオフ電圧である。以下の問①～④に答えよ。

[次ページに続く]

- ① pチャネルデプレッション形 JFET の通常動作配線に対応するように、2つの直流電源の記号 $\text{—}|$ と $\text{—}|$ を解答用紙の図(a)に書き加えよ。なお、 $\text{—}|$ は $\text{—}|$ よりも大きな直流電圧を出力する電源である。
- ② 図2および図4の JFET の断面概略モデルに記載されている空乏層の様子は、図3の点Aでの空乏層の様子に対応している。図3の点B、点Cおよび点Dでの空乏層の様子を、図4を参照して解答用紙の図(b)、図(c)および図(d)のそれぞれに描け。ただし、n形領域への空乏層の広がりは無視できるものとする。
- ③ 図3において、 I_D の大きさは V_{DS} の大きさの増加に対して、点B付近では増加する一方で、点D付近ではほぼ一定となる理由を説明せよ。
- ④ 図3において、 $V_G=0$ とした場合の V_{DS} の大きさに対する I_D の大きさの変化の様子を解答用紙の図(e)に描き加えよ。また、そのように I_D の大きさが変化する理由を説明せよ。

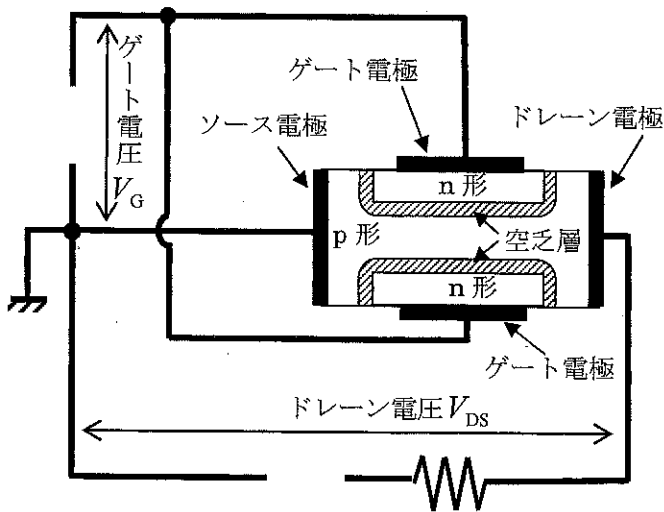


図2

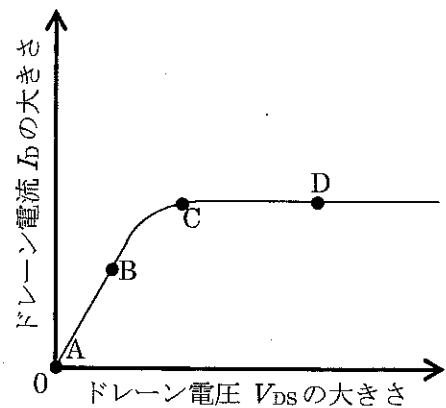


図3

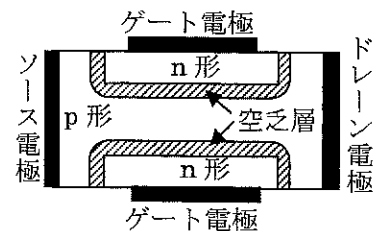


図4

[IV] 固体物性に関する以下の設問 (1) ~ (3) に答えよ。

(1) 金属中の伝導電子に関する以下の問①~③に答えよ。金属は絶対零度であり，アルカリ金属などに代表される自由電子モデルで記述できるとする。

① 伝導電子の平均自由行程は，結晶格子間隔の何倍程度以上か答えよ。

以下，伝導電子の振る舞いを，一辺の長さ L の立方体に閉じ込められたモデルで考える。電子の質量は m ，換算プランク定数は $\hbar = h/(2\pi)$ とする。

② 1個の自由電子に対するシュレーディンガー方程式を書け。

③ 前問②の方程式を解くと，波動関数は $\Psi(\mathbf{r}) = A \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$ と書ける。ここで \mathbf{r} は電子の位置ベクトル， \mathbf{k} は波数ベクトル， A は正の実数である。電子の状態は， \mathbf{k} とスピんで記述される。(a)周期的境界条件を課すと， \mathbf{k} は量子化され， \mathbf{k} の各成分はゼロを含むとびとびの値をとる。

この解は，1個の電子に対するものであるが，(b)独立電子近似を仮定すると，全電子数が N 個の自由電子からなる系にも適用できる。 N が十分大きい場合， N 個の自由電子は波数空間においてフェルミ球を構成する。この半径を k_F と書く。以下の問(a)~(f)に答えよ。

(a) 下線部(a)を簡潔に説明せよ。

(b) 下線部(b)を簡潔に説明せよ。

(c) フェルミ球面上の波数ベクトルが $(0, 0, k_F)$ で与えられるとき，この電子の実空間における速度の各成分 v_x, v_y, v_z を答えよ。

(d) フェルミ球面上にある電子のエネルギーは，温度に換算すると何ケルビン程度か答えよ。

(e) 波動関数についての規格化条件から， A を求めよ。

(f) k_F を L, N を用いて表せ。途中の過程も記せ。

[次ページに続く]

(2) ある物質が超伝導体であることを科学的に証明するには、ふたつの現象を実験で示す必要がある。一つは電気抵抗がゼロである。もう一つの現象の名称を答えよ。また、その現象の特徴を「ゼロ磁場冷却」, 「磁場中冷却」という用語を用い, 「シールド効果」との相違点を明確にしつつ, 説明せよ。

(3) 室温 5°C の部屋に長時間置かれた金属の椅子と木の椅子とでは, 明らかに金属の椅子の方が冷たく感じられる。両者ともに同じ温度 (5°C) なのに, このように感じられる理由を「熱伝導」, 「伝導電子」という用語を用いて, 簡潔に述べよ。