

平成28年度第2次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
外国人留学生特別入試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は、表紙を含めて全部で7ページあります。
3. 試験時間は 9:00～11:00 です。
4. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。

問題冊子1部、解答用紙3枚、下書用紙2枚

5. 問題は全部で6題あります。そのうち3題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には、問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題 1

2変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

について、次の問いに答えよ。

(1) 1階偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ。

(2) 極限值

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を求めよ。

(3) 1階偏導関数 $f_x(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ。

問題 2

a を実数とする。 $A = \begin{pmatrix} a & a-1 & 1-a \\ a-2 & a & 2-a \\ a-2 & a-1 & 3-a \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) A の行列式 $|A|$ を求めよ。
- (2) 行列 A の階数 $\text{rank}(A)$ が 3 となるための必要十分条件を求めよ。
- (3) A の固有値を求めよ。
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ。

問題 3

曲線 $C_1: \alpha y^3 = x^4$, $C_2: \beta x^3 = y^4$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) の原点以外の交点を $P(a, b)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a を α, β を用いて表せ。
- (2) 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を α, β を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた面積が 1 になるように α, β を定めたとき、点 P の軌跡を求めよ。

問題 4

S_4 を 4 次対称群, A_4 を 4 次交代群とする。次の問いに答えよ。

- (1) S_4 の位数 $|S_4|$ と A_4 の位数 $|A_4|$ を求めよ。
- (2) A_4 は S_4 の正規部分群であることを示せ。
- (3) A_4 の部分群をすべて求めよ。
- (4) (3) で得られたもののうち, 正規部分群を選びその理由を述べよ。

問題 5

(X, d) を距離空間, A, B を X の空でない部分集合とする。 A と B の間の距離を

$$\text{dist}(A, B) = \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

と定義する。特に, $A = \{a\}$ の場合, $\text{dist}(A, B)$ を $\text{dist}(a, B)$ と表す。次の問いに答えよ。

(1) $A \cap B \neq \emptyset$ ならば, $\text{dist}(A, B) = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) 各 $x, y \in X$ に対して

$$|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 各 $x \in X$ に対して

$$\text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(x, A) + \text{dist}(x, B)$$

が成り立つことを示せ。

問題 6

次の線形計画問題について考える。

$$(LP) \begin{cases} \text{最小化} & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ & x_1 + x_2 \geq 7 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 実行可能領域のすべての頂点を求めよ。
- (2) 座標平面 (x_1, x_2) 上に問題 (LP) の実行可能領域と目的関数の等高線を図示し、問題 (LP) の最適解と最適値を求めよ。
- (3) 問題 (LP) の双対問題 (D) を記述せよ。
- (4) (3) で求めた双対問題 (D) をシンプレックス法で解き、双対問題 (D) の最適解と最適値を求めよ。ただし、シンプレックス法の計算過程も記述すること。