平成２８年度第１次募集（平成２７年１０月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　入　試

数理物質科学専攻
数理科学
Ａ３

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページあります。
3. 試験時間は　９：００～１１：００　です。
4. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚，下書用紙２枚
5. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題　1

以下の問いに答えよ。

(1) 空間の単位球 $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqq 1\}$ を考え，実数 $-1<t<1$ に対して平面 $z=t$ で切った断面の面積を $A(t)$ とするとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1} A(t)dt$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$ の値を求めよ。

(3) $\mathbb{R}^4$ で $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2 \leqq 1\}$ を考え，実数 $-1<t<1$ に対して $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\{(x_1,x_2,x_3) : {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 \leqq 1-t^2\}$$

の体積を $V(t)$ とする。$\displaystyle\int_{-1}^{1} V(t)dt$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{問題}\quad 2}$

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ。

(2) A の行列式を求めよ。

(3) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき，連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解け。

(4) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ とする。このとき，連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解が存在しないような $\mathbf{b}$ を 1 つ求めよ。

$\boxed{\text{問題}\quad 3}$

H を複素 Hilbert 空間とし，H の 2 元 x と y の内積を $\langle x, y\rangle$ で表し，$||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ とおく。また H 上の有界線形作用素 T に対して

$$\alpha = \sup_{||x||=1} ||Tx||, \qquad \beta = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|$$

とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $x, y \in H$ に対して $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$ を示せ。

(2) $\beta \leqq \alpha$ を示せ。

(3) さらに $T^* = T$ ならば，任意の $x, y \in H$ に対して

$$|\langle Tx, y\rangle| \leqq \frac{\beta}{2}\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$$

となることを示せ。ここで T^* は T の共役作用素を表す。

(4) (3) に引き続いて，$T^* = T$ ならば $\alpha = \beta$ となることを示せ。

問題　4

G_1 と G_2 を群とし，写像 $f: G_1 \to G_2$ を G_1 から G_2 への群の準同型写像とする。N_2 を G_2 の正規部分群とし，$N_1 = f^{-1}(N_2)$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) e_1 を群 G_1 の単位元としたとき，$f(e_1)$ は群 G_2 の単位元になることを示せ。

(2) N_1 は G_1 の正規部分群になることを示せ。

(3) f が全射であるとき，G_1 の N_1 に関する剰余群 G_1/N_1 と G_2 の N_2 に関する剰余群 G_2/N_2 は同型となることを示せ。

問題　5

$\mathbb{R}^3$ 内の曲線 $\mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3)$ $(-\infty < t < +\infty)$ を C で表す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の点 $\mathbf{p}(-1) = (-1, 1, -1)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 実数 a に対して，曲線 C の点 $\mathbf{p}(a) = (a, a^2, a^3)$ における接触平面を H_a とする。H_1, H_2, H_3 の交点 P の座標を求めよ。

(3) (2) で求めた点 P は 3 点 $\mathbf{p}(1)$, $\mathbf{p}(2)$, $\mathbf{p}(3)$ を通る平面上にあることを示せ。

問題　6

$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の無限回微分可能な実数値関数で，

$$f(-1)=2,\quad f(0)=1,\quad f(1)=3$$

とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 以下の条件を満たす 2 次多項式 $L(x)$，即ち $f(x)$ の 2 次 Lagrange 補間関数を求めよ。

$$L(-1)=f(-1),\quad L(0)=f(0),\quad L(1)=f(1).$$

(2) x_0 を実数とする。次の式が成り立つような a を求めよ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\{f(x_0-h)+af(x_0)+f(x_0+h)\}=f''(x_0)$$

ただし，$f''(x)$ は $f(x)$ の第 2 次導関数である。

(3) 関数 $g(x)$ を 1 次多項式とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の差を $\rho(x)=f(x)-g(x)$ とする。

$$\|f-g\|=\sqrt{\rho(-1)^2+\rho(0)^2+\rho(1)^2}$$

とおくとき，$\|f-g\|$ を最小化する $g(x)$ を求めよ。