平成２８年度第１次募集（平成２７年１０月入学含む）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

数理物質科学専攻

物理学

Ａ１

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で８ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１８０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

一様な磁束密度の中で運動する粒子のラグランジアン L が，次のように与えられている。

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{1}{2}qB\left(x\dot{z}+y\dot{y}-z\dot{x}\right).$$

ここで m，q，B はそれぞれ，粒子の質量，粒子の電荷，磁束密度の大きさである。また，一般化座標の組 (x,y,z) は，デカルト座標系における粒子の位置座標であり，$(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ は，粒子の速度ベクトル（位置座標の時間 t に関する微分）である。以下の問いに答えよ。

(1) x，y，z に共役な一般化運動量 p_x，p_y，p_z をそれぞれ求めよ。

(2) x，y，z に対するラグランジュの運動方程式をそれぞれ求めよ。

(3) 磁束密度ベクトルの各成分 B_x，B_y，B_z をそれぞれ求めよ。

(4) 粒子のエネルギー E を求めよ。

(5) ラグランジュの運動方程式の解のうち，次の関係式を満たす解 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ を考える。

$$x(t)+i\,z(t) = i\,r\exp\left[-i\left(\frac{qB}{m}t+\frac{\pi}{3}\right)\right], \qquad y(t)=\sqrt{x(t)^2+z(t)^2}.$$

ここで $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位，r は正の定数である。このとき，時刻 $t=0$ における粒子の速度ベクトルの各成分 $\dot{x}(0)$，$\dot{y}(0)$，$\dot{z}(0)$ をそれぞれ求めよ。

[2]

(I) 真空の誘電率，透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0 として以下の問いに答えよ。

(1) 無限に長い直線上に，一様な線密度 λ で電荷が分布している。このとき直線から距離 r の位置に生じる電場の大きさを求めよ。

(2) 無限に長い直線状の導線に大きさ I の電流が流れている。このとき導線から距離 r の位置に生じる磁束密度の大きさを求めよ。

(II) 図1のように，x 軸上に置かれた無限に長い直線状の導線に，大きさ I の電流が点Aから点Bの向きに流れている。x 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$ で表すと，導線上の微小部分 dx を流れる電流が，そこからベクトル $\boldsymbol{r}$ だけ変位した点につくる磁束密度は次式で表される。

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\,dx\ .$$

ここで μ_0 は真空の透磁率である。いま，導線から距離 ℓ だけ離れた点Pでの磁束密度の大きさを考える。ただし $\angle\mathrm{PAB} = \theta_1$，$\angle\mathrm{PBA} = \theta_2$ である。以下の問いに答えよ。

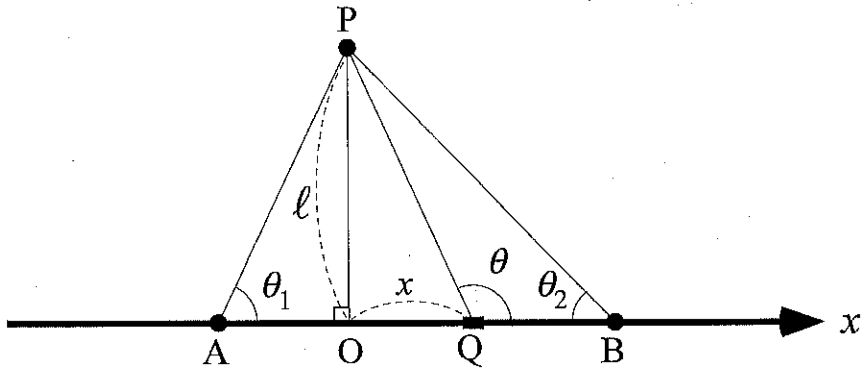

図 1:

(1) 点Pから導線に垂線を下ろし，導線との交点を原点Oとする。点Qの位置にある導線の微小部分 dx を流れる電流が点Pにつくる磁束密度の大きさを求めよ。ただし点Qの座標は x であり，$\angle\mathrm{PQB} = \theta$ とする。

(2) 導線のAB間に流れる電流が点Pにつくる磁束密度の大きさは，前問の結果をAB間について積分することで得られる。この積分をθについて行い，AB間の電流により点Pにつくられる磁束密度の大きさBが次式で表されることを示せ。

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\ell}\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) .$$

(Ⅲ) 図2のように，半径aの円が内接する正n角形の形をした回路の導線に，大きさIの電流が流れている。真空の透磁率をμ_0として以下の問いに答えよ。必要ならば，(Ⅱ)で示された結果を用いてよい。

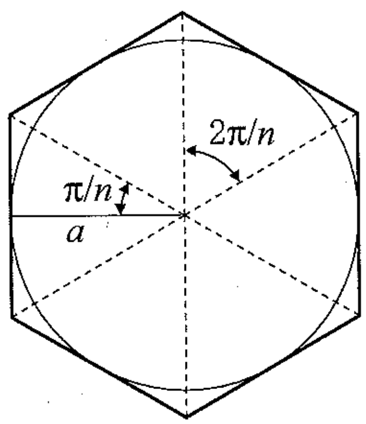

図 2: $n = 6$の場合

(1) 正方形 ($n = 4$) の場合，この回路の中心における磁束密度の大きさを求めよ。

(2) 正n角形の場合，この回路の中心における磁束密度の大きさを求めよ。

(3) 前問の結果においてnを無限大にする極限をとると，$B = \dfrac{\mu_0 I}{2a}$となることを示せ。

[3]

一辺Lの正方形の底面をもつ直方体の箱があり，箱の上面は上下に動けるようになっている。図1のように，高さをzに固定した状態の箱に質量mの単原子分子からなる古典理想気体を閉じ込め，その箱を温度Tの熱浴中に入れて系全体が熱平衡状態になるまで放置した。以下の問いに答えよ。なお必要ならば，問題文の最後にある数学公式を用いてよい。

(1) 1個の気体分子の運動エネルギーは，運動量$\boldsymbol{p}$を用いて$E_1 = \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$と表される。カノニカル分布を用い，閉じ込められている気体分子1個の分配関数が

$$Z_1 = V\left(\frac{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}{h^2}\right)^{3/2}$$

となることを説明せよ。ここで，k_{B}はボルツマン定数，hはプランク定数，$V = L^2 z$である。

(2) N個の気体分子の運動エネルギーは$E_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}$である。このとき，$N$個の分子からなる理想気体の分配関数は

$$Z_N = \boxed{\text{(a)}} \times Z_1^{\boxed{\text{(b)}}}$$

となる。$\boxed{\text{(a)}}$および$\boxed{\text{(b)}}$に当てはまる数式を，理由を付けて記せ。

(3) N個の分子からなる理想気体に対するヘルムホルツの自由エネルギー$F(T,V)$，および内部エネルギーの期待値を求めよ。ただし，$N \gg 1$とする。

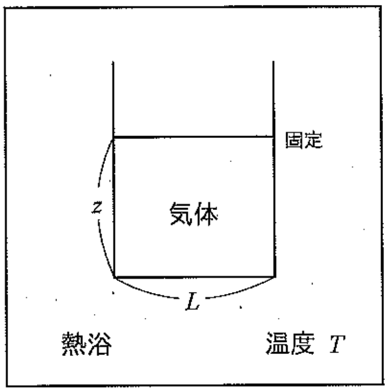

図1

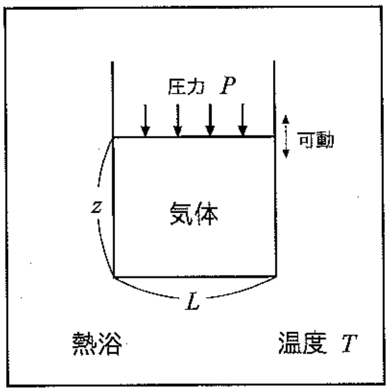

図2

次に，N 個の単原子分子からなる理想気体を閉じ込めたまま，図２のように箱の上面がなめらかに動けるように設定し，その箱を温度 T，圧力 P の熱浴中に置いて系全体を熱平衡状態にした。箱の高さが z のとき，圧力によるポテンシャルエネルギーは PL^2z で与えられる。このポテンシャルエネルギーを考慮したカノニカル分布より，気体の入った箱の高さが z となる確率分布は

$$f(z) = \frac{1}{Y} Z_N \exp\left(-\frac{PL^2 z}{k_B T}\right)$$

で表される。ここで Y は規格化定数である。

(4) 規格化定数 Y を求めよ。

(5) $G(T, P) = -k_B T \log Y$ と定義する。$G(T, P)$ の名称を答え，ヘルムホルツの自由エネルギーとの関係を書け。

(6) 熱平衡状態における z の期待値を求めよ。

[3] の数学公式

ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \qquad (a > 0)$$

スターリングの公式

$$\log n! \simeq n \log n - n\,, \qquad (n \gg 1)$$

ガンマ関数

$$\int_0^{\infty} dt\, t^n e^{-t} = \Gamma(n+1) = n!\,. \qquad (n\text{は}0\text{または自然数})$$

[4]

プランク定数 h に対して $\hbar = h/2\pi$ とし，また，真空中の光速を c として，以下の問いに答えよ。なお，必要ならば，問題文の最後にある数学公式を用いてよい。

質量 m の電子が，原点を力の中心としたクーロンポテンシャル

$$V(r) = -\alpha\frac{\hbar c}{r}, \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$$

の中を運動している。ここで，r は原点からの距離であり，また，α は電気素量 e，真空の誘電率 ε_0，$\hbar$ および c を用いて構成できる無次元定数である。

この電子の定常状態を表す波動関数を極座標系で $\psi(r,\theta,\phi)$ とする。$\psi(r,\theta,\phi)$ が満たすシュレーディンガー方程式は，動径運動量演算子 $\widehat{p}_r$ および角運動量演算子 $\widehat{\boldsymbol{L}}$ を用いて，

$$\left[\frac{(\widehat{p}_r)^2}{2m} + \frac{\widehat{\boldsymbol{L}}^2}{2mr^2} - \alpha\frac{\hbar c}{r}\right]\psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi)$$

と表される。ここで，$\widehat{p}_r$ は

$$\widehat{p}_r\psi(r,\theta,\phi) = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\Big[r\,\psi(r,\theta,\phi)\Big]$$

で与えられる微分演算子である。

(1) 質量，長さ，時間の次元をそれぞれ M，L，T で表すとき，ポテンシャルエネルギー V の次元は $[V] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$，角運動量 $\boldsymbol{L}$ の次元は $[\boldsymbol{L}] = \mathrm{ML^2T^{-1}}$ と表される。これに習って，$\hbar c$ の次元を答えよ。

(2) 波動関数 $\psi(r,\theta,\phi)$ が角運動量の二乗 $\widehat{\boldsymbol{L}}^2$ および角運動量の z 成分 $\widehat{L}_z$ の同時固有状態を表すとする。この状態において，$\widehat{\boldsymbol{L}}^2$ の固有値，および，$\widehat{\boldsymbol{L}}^2$ がその固有値をとるときに $\widehat{L}_z$ がとりうる値の個数を，それぞれ負でない整数 $\ell\,(=0,1,2,\cdots)$ を用いて答えよ。

以下，電子が基底状態にある場合を考える。このとき，$\widehat{\boldsymbol{L}}^2$ の固有値は 0 であり，また，波動関数を次の形におくことができる。

$$\psi = \frac{u_0(r)}{r}.$$

これをシュレーディンガー方程式に代入して整理すると，関数 $u_0(r)$ は次の微分方程式

$$\left[-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{d^2}{dr^2} - \alpha\frac{\lambda}{r}\right]u_0(r) = \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)u_0(r)$$

を満たすことがわかる。ここで，E_0 は基底状態のエネルギー，mc^2 は電子の静止エネルギーであり，また，λ は長さの次元をもつ定数である。

(3) 定数 λ を $\hbar$, m, c を用いて表せ。さらに，定数 λ の名称を答えよ。

(4) 関数 $u_0(r)$ を次の形に仮定する。ただし，N および b は定数である。

$$u_0(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi N}} r\, e^{-(r/b)} .$$

この $u_0(r)$ が上記の微分方程式を満たすように定数 b を決定せよ。解答は α や λ を用いて表すこと。また，エネルギー固有値 E_0 が $-\dfrac{1}{2}\alpha^2 mc^2$ に等しいことを示せ。

(5) 次の規格化条件から，$N = b^3/4$ となることを示せ。

$$1 = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, |\psi(r,\theta,\phi)|^2 = 4\pi \int_0^\infty dr\, |u_0(r)|^2 .$$

(6) 基底状態におけるポテンシャルエネルギーの期待値 $\langle V \rangle$ を計算し，$\langle V \rangle = -\alpha^2 mc^2$ であることを示せ。

(7) 基底状態における動径運動エネルギーの期待値 $\left\langle \dfrac{p_r^2}{2m} \right\rangle$ とポテンシャルエネルギーの期待値 $\langle V \rangle$ に対して，次の関係式（ビリアル定理）が成り立っていることを示せ。

$$2\left\langle \frac{p_r^2}{2m} \right\rangle = -\langle V \rangle .$$

[4] の数学公式

$$\int_0^\infty dt\, t^n e^{-t} = \Gamma(n+1) = n! . \qquad (n\text{ は 0 または自然数})$$