平成３０年度第１次募集（平成２９年１０月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一般入試

数理物質科学専攻
物理学
Ａ１

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で６ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１２０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

x 軸上を運動する質点のラグランジアンが，次のように与えられている。

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - A|x|^n$$

ここで，m は質点の質量，A は正の定数，n は自然数である。また，x は質点の座標，$\dot{x}$ は x の時間 t に関する微分である。いま，全エネルギーが E のとき，質点は $x=-b_n$ と $x=b_n$ の間を振動した。ここで，E と b_n は正の定数である。以下の問いに答えよ。

(1) E を表す式を書け。

(2) $b_n = \left(\dfrac{E}{A}\right)^{\frac{1}{n}}$ であることを示せ。

(3) $x>0$ における運動方程式を書け。

(4) $n=1$ のとき，質点が $x=b_1$ を出発して $x=0$ に到達するまでの時間を t_1 とする。t_1 を m, A, E のうち，必要なものを用いて表せ。

(5) 一般の n のとき，$\dfrac{dt}{dx}$ を x で積分することにより，振動の周期を求めよ。なお，必要な場合，次の公式を用いて良い。

$$\int_0^1 dy \, \frac{1}{\sqrt{1-y^n}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$$

ここで，$\Gamma(z)$ はガンマ関数であり，$\Gamma(1)=1$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ である。

(6) 振動の周期が E によらない n を答えよ。また，そのときの周期を求めよ。

[2]

(I) 電荷の存在しない真空中の静電場について考える。電場 $\vec{E}$ は，静電ポテンシャル V を用いて $\vec{E} = -\mathrm{grad}\, V$ で与えられ，V はラプラス方程式 $\Delta V = 0$ を満たす。この方程式に対する，z 軸のまわりに軸対称な一般解は，原点からの距離 r と z 軸から測った天頂角 θ を用いて，

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)} \right\} P_\ell(\cos\theta)$$

で与えられる。$P_\ell(x)$ $(\ell = 0, 1, 2, \cdots)$ はルジャンドル多項式を表し，$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $\cdots$ などである。また，A_ℓ, B_ℓ $(\ell = 0, 1, 2, \cdots)$ は境界条件によって決まる定数である。

いま，z 軸の正方向の大きさ E_0 の一様な電場中に，半径 R の帯電していない導体球が置かれたとする。導体の中心は原点にあり，導体上の電位は 0 とする。以下の問いに答えよ。

(1) $r \to \infty$ で $V \to -E_0 r \cos\theta$ となることを用いて，A_ℓ $(\ell = 0, 1, 2, \cdots)$ を決めよ。

(2) 次に，導体上で $V = 0$ であることを用いて，B_ℓ $(\ell = 0, 1, 2, \cdots)$ を決め，$V(r,\theta)$ を求めよ。

(3) 導体表面上における単位面積あたりの誘導電荷 $\sigma(R,\theta)$ を求めよ。ただし，$\sigma(R,\theta)$ は，真空中の誘電率 ε_0 と，導体表面における電場の法線成分 $E_n(R,\theta)$ を用いて $\sigma(R,\theta) = \varepsilon_0 E_n(R,\theta)$ で与えられる。

(II) 電荷も電流も存在しない真空中でのマクスウェル方程式は,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\
\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0, \\
\mathrm{div}\vec{E} &= 0, \\
\mathrm{div}\vec{B} &= 0
\end{aligned}$$

である。ここで, $\vec{E}$ は電場, $\vec{B}$ は磁束密度を表し, ε_0 と μ_0 はそれぞれ真空中での誘電率と透磁率である。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{E}$ と $\vec{B}$ は, スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を用いて

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi, \\
\vec{B} &= \mathrm{rot}\vec{A}
\end{aligned}$$

と書ける。χ を時間と座標の任意関数とすると, $\vec{A} \to \vec{A} + \mathrm{grad}\chi$, $\phi \to \phi - \partial\chi/\partial t$ という変換の下で, $\vec{E}$ と $\vec{B}$ が不変であることを示せ。

(2) ϕ と $\vec{A}$ との間に

$$\mathrm{div}\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

という関係が成り立つとき, マクスウェル方程式より $\vec{A}$ に対する波動方程式を導け。必要ならば, ベクトル $\vec{v}$ に対して, $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{v}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{v}) - \Delta\vec{v}$ という関係式を使ってもよい。

(3) いま, $\mathrm{div}\vec{A} = 0$, $\phi = 0$ とする。z 方向に伝播する, 振動数 ω ($\omega > 0$), 波数 k ($k > 0$) の平面波 $\vec{A}\,(\vec{x}, t) = (a\sin(kz - \omega t),\ 0,\ 0)$ が波動方程式の解であるための ω と k の関係式を求め, 光速 c を ε_0 と μ_0 を用いて表せ。ここで, a は正の定数である。また, この解に対し, $\vec{E}$ と $\vec{B}$ は直交することを示せ。

[3]

独立な１次元調和振動子が M 個あり，i 番目 $(i = 1, 2, \cdots, M)$ の調和振動子の角振動数を ω_i とする。基底状態を基準にした各調和振動子のエネルギー固有値は

$$\varepsilon_i = \hbar\,\omega_i\,n_i\ , \qquad n_i = 0, 1, 2, \cdots$$

と表される。ここで，プランク定数 h に対し，$\hbar = h/(2\pi)$ である。これらの調和振動子が温度 T の熱平衡状態にあるとし，以下の問いに答えよ。ただし，ボルツマン定数を k_B とする。

(1) i 番目の調和振動子の分配関数を求めよ。

(2) i 番目の調和振動子のエネルギーの期待値 $\langle \varepsilon_i \rangle$ を求めよ。

(3) 調和振動子系の全エネルギーは

$$E = \sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i$$

である。全エネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ を求めよ。

各調和振動子に対する量子数 n_i は，エネルギー $\hbar\omega_i$ を持つ一粒子量子状態を占有するボース粒子の粒子数と解釈できる。そこで，調和振動子系の問題をボース粒子系とみなして，グランドカノニカル集合を用いて考える。ここで，全系に含まれる粒子数は

$$N = \sum_{i=1}^{M} n_i$$

と書けることに注意せよ。

(4) ボース粒子の具体例を２種類挙げよ。

(5) 化学ポテンシャルを μ とし，温度 T における大分配関数を求めよ。

(6) 全系に含まれる粒子数の期待値 $\langle N \rangle$ を求めよ。

(7) 調和振動子系とボース粒子系のエネルギー期待値が等しくなるような化学ポテンシャル μ の値を求めよ。

[4]

磁場中に大きさが $\hbar/2$ のスピンがある。ここで，プランク定数 h に対し，$\hbar = h/(2\pi)$ とした。以下，$\hbar$ を単位としたスピン演算子 $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ が，

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と行列表示される基底を用いて考える。スピンと磁場との相互作用を記述するハミルトニアンは，スピン演算子と磁場との内積に比例する。いま，磁場が z 軸の正方向を向いた一様な静的磁場であるとし，この系のハミルトニアンが，定数 ω_0（$\omega_0 > 0$）を用いて

$$H = \hbar\omega_0 S_z$$

と表されるとする。一般に，スピンの状態を表す規格化された状態ベクトルは，時間 t に依存する複素数 a, b を用いて，ベクトル

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad (|a|^2 + |b|^2 = 1)$$

で表される。以下の問いに答えよ。

(1) S_x, S_y, S_z の間の交換関係をすべて書け。

(2) S_y の固有値と，対応する規格化された固有ベクトルをすべて求めよ。

(3) この系の時間発展演算子 $e^{-iHt/\hbar}$ の行列表示を求めよ。

(4) 時刻 $t = 0$ にスピンが y 軸の正の方向を向いていたとする。時刻 t（$t > 0$）において，スピンが y 軸の負の方向を向いている状態を見出す確率を求めよ。

(5) 問 (4) の時刻 t（$t > 0$）における S_x, S_y の期待値を求めよ。

(6) 回転演算子 $e^{-iS_y\theta}$（θ は実数）の行列表示を求めよ。

(7) 磁場の向きを，y 軸のまわりに角度 θ だけ回転し，$(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ の方向を向かせたとする。このときのハミルトニアンの規格化された固有ベクトルを求めよ。