

令和3年度第2次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一 般 入 試

数理物質科学専攻

数理学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. 配布の電子ファイルは2つです。試験問題ファイル（このファイル）と解答用紙ファイルです。
2. 問題は全部で6題あります。そのうち3題を選択して解答してください。4題以上解答した場合は、全解答が無効となります。
3. 解答用紙は、解答用紙ファイルをB4版で印刷（片面）して3枚用意してください。各問題の解答は解答用紙1枚で書いてください（裏面利用可）。
4. 各解答用紙には、問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも解答用紙3枚すべてを提出してください。
5. 解答用紙の提出締切を厳守してください。

問題	1
----	---

xy 平面内の4つの直線 $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = 1$, $x - y = -1$ で囲まれた図形を境界まで含めて K とする。2変数関数 $f(x, y) = \frac{x - y}{1 - xy}$ の K における最大・最小について調べよ。

問題 2

I を 5 次単位行列とする。5 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して、次の問いに答えよ。

(1) $A^n = I$ となる 1 以上の整数 n で最小となるものを求めよ。

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(3) A は対角化可能であるかどうか理由をつけて答えよ。

(4) 5 つの複素数 a, b, c, d, e に対して、5 次正方行列 $\begin{pmatrix} e & d & c & b & a \\ a & e & d & c & b \\ b & a & e & d & c \\ c & b & a & e & d \\ d & c & b & a & e \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ。

問題 3

$\mathcal{H}$ を複素 Hilbert 空間とし, $x, y \in \mathcal{H}$ の内積を $\langle x, y \rangle$, ノルムを $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ と表す。また, $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体の集合を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ と表す。次の問いに答えよ。

- (1) 任意の $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対してある $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在して

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (x, y \in \mathcal{H})$$

が成り立つことを示せ。

- (2) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ とおくとき,

$$\|T^*T\| = \|T\|^2$$

が成り立つことを示せ。

問題 4

G を群とし、 $Z(G)$ を G の中心とする。 H を $H \subset Z(G)$ となる G の部分群とする。次の問いに答えよ。

- (1) H は G の正規部分群になることを示せ。
- (2) G の H による剰余群 G/H が巡回群であるとき、 G はアーベル群になることを示せ。
- (3) $(G : H)$ が素数であるとき、 G はアーベル群になることを示せ。

問題 5

2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $\mathbf{p}(t) = (3t^2, t - 3t^3)$ ($-\infty < t < \infty$) を C で表す。次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の単位接ベクトルを求めよ。
- (2) 曲線 C の曲率の定義を述べよ。
- (3) 曲線 C の曲率 $\kappa(t)$ を求めよ。
- (4) (3) で求めた $\kappa(t)$ の t に関する導関数が 0 となる t をすべて求めよ。

問題 6

確率変数 $X_1, \dots, X_m$ はたがいに独立で, 各 X_i は確率量関数 $f_{X_i}(x_i) = {}_nC_{x_i}p^{x_i}q^{n-x_i}$ ($x_i = 0, 1, \dots, n; 0 < p < 1, q = 1 - p$) を持つ二項分布 $B(n, p)$ に従うとする。次の問いに答えよ。

- (1) X_i の積率母関数 $g_{X_i}(\theta) = E(e^{\theta X_i})$ を求めよ。
- (2) X_i の平均 $E(X_i)$ と分散 $V(X_i)$ を求めよ。
- (3) $Y = \sum_{i=1}^m X_i$ の積率母関数 $g_Y(\theta) = E(e^{\theta Y})$ を求めよ。