

令和3年度第1次募集（令和2年10月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一 般 入 試

数理解物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. 配布の電子ファイルは2つです。試験問題ファイル（このファイル）と解答用紙ファイルです。
2. 問題は全部で6題あります。そのうち3題を選択して解答してください。4題以上解答した場合は、全解答が無効となります。
3. 解答用紙は、解答用紙ファイルをB4版で印刷（片面）して3枚用意してください。各問題の解答は解答用紙1枚で書いてください（裏面利用可）。
4. 各解答用紙には、問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも解答用紙3枚すべてを提出してください。
5. 解答用紙の提出締切を厳守してください。

問題 1

$a < b$, $c < d$ とする。関数 $f(x, y)$ は有界閉集合 $[a, b] \times [c, d]$ 上で連続とする。
次の問いに答えよ。

(1) $\int_a^b f(x, y) dx$ は $[c, d]$ 上で連続であることを示せ。

(2) y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$ が $[a, b] \times [c, d]$ 上で連続ならば,

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f_y(x, y) dx$$

が成り立つことを示せ。

問題 2

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ。
- (2) (1) で求めた各固有値に対して固有ベクトルを求めよ。
- (3) 自然数 n に対して， A^n を求めよ。

問題 3

$C([0, 1])$ を区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数全体の集合とし, 各 $f, g \in C([0, 1])$ に対して

$$d_1(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

と定義する。 $S = \{f \in C([0, 1]) \mid f(0) = 1\}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $(C([0, 1]), d_1)$, $(C([0, 1]), d_2)$ は距離空間であることを示せ。
- (2) S は $(C([0, 1]), d_1)$ の閉集合であることを示せ。
- (3) S は $(C([0, 1]), d_2)$ の閉集合でないことを示せ。

問題 4

m と n を互いに素な正の整数とする。 G を群とし、 A を指数 n の部分群とする。すなわち、任意の $x \in G$ に対して、 $x^n \in A$ となる。さらに、 A はアーベル群であるとする。このとき、 $g, h \in G$ が

$$hg^{m+n} = g^{m+n}h$$

を満たすならば、

$$h^\ell g = gh^\ell$$

となる正の整数 ℓ が存在することを示せ。

問題 5

2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $\boldsymbol{p}(t) = (t, t^3 - t)$ ($-\infty < t < \infty$) を C で表す。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の曲率 $\kappa(t)$ を求めよ。
- (2) (1) で求めた $\kappa(t)$ の t に関する導関数 $\kappa'(t)$ が 0 となる t をすべて求めよ。

問題 6

同じポアソン分布 $Po(\lambda)$ に従う互いに独立な 2 つの確率変数 X, Y がある。もし λ が 1 に比べて十分大きければ、 $X - Y$ の従う確率分布は正規分布で近似できることを示せ。