

平成29年度第1次募集（平成28年10月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一般入試

数理物質科学専攻

数理科学

A 3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は、表紙を含めて全部で7ページあります。
3. 試験時間は 9:00～11:00 です。
4. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。

問題冊子1部，解答用紙3枚，下書用紙2枚

5. 問題は全部で6題あります。そのうち3題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には、問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題 1

各自然数 n ($n \geq 2$) に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & (0 \leq x \leq \frac{1}{2n}) \\ 2 - 2nx & (\frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n}) \\ 0 & (\frac{1}{n} < x \leq 1) \end{cases}$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{1}{5}\right)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} n f_n(x) dx$ であることを示せ。
- (3) 関数列 $\{n f_n\}$ は $[0, 1]$ 上で定数関数 0 に一様収束しないことを示せ。

問題 2

行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1-\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{2} & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ について,
以下の問いに答えよ。

- (1) A^2 を求めよ。
- (2) A の固有値が 0 または 1 であることを示せ。
- (3) 行列 B の転置行列を B' で表す。そのとき, $B'B$ を求めよ。
- (4) B の固有値の絶対値が 1 に等しいことを示せ。

問題 3

X をコンパクト空間, Y を局所コンパクト空間とし, Z をハウスドルフ空間とする。このとき, 以下の問いに答えよ。ただし Y が局所コンパクトであるとは, Y の各点にコンパクトな近傍が存在することである。

- (1) $f: X \rightarrow Z$ は連続写像とする。 F が X の閉部分集合ならば $f(F)$ は Z のコンパクト集合であることを示せ。
- (2) $f: X \rightarrow Z$ が全単射連続写像であれば, f は同相写像であることを示せ。
- (3) $g: Y \rightarrow Z$ が全単射連続写像であるとき, g は同相写像であるかを調べよ。 g が同相写像であるならばそれを証明し, 一般に同相写像とは限らないならば, そのような例をあげ理由を述べよ。

問題 4

G をアーベル群とし、 e を G の単位元とする。正の整数 n に対して、 $H_n = \{x^n \mid x \in G\}$, $T_n = \{y \in G \mid y^n = e\}$ とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) H_n と T_n は G の正規部分群になることを示せ。
- (2) G の T_n による剰余群 G/T_n は H_n と同型になることを示せ。
- (3) G の位数が 33 であるとき、 H_6 の位数を求めよ。

問題 5

3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の曲線 $\mathbf{p}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3t)$ ($-\infty < t < +\infty$) を C で表す。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の点 $\mathbf{p}(\frac{\pi}{3}) = (1, \sqrt{3}, \pi)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C の点 $\mathbf{p}(\frac{\pi}{3}) = (1, \sqrt{3}, \pi)$ における接触平面の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C の曲率を求めよ。

問題 6

確率変数 X が確率量関数 $f_X(x) = \frac{1}{N}$ ($x = 1, \dots, N$) を持つ離散一様分布に従うとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。
- (2) X の積率母関数 $g_X(\theta) = E(e^{\theta X})$ を求めよ。
- (3) X の累積分布関数 $F_X(x)$ を求めよ。