

平成27年度第2次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一般入試

数理物質科学専攻
数理科学
A3

専門科目 (数学)

注意事項

1. この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は、表紙を含めて全部で7ページあります。
3. 試験時間は 9:00~11:00 です。
4. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。

問題冊子1部、解答用紙3枚、下書用紙2枚

5. 問題は全部で6題あります。そのうち3題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には、問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題 1

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = x^2 \sin x$ の第 n 次導関数を求めよ。

(2) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k!} \right) dx$$

を求めよ。

(3) 2重積分

$$\iint_D \tan(x^2 + y^2) dx dy$$

を求めよ。ただし,

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

である。

問題 2

行列

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{3} \\ 1-a & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (0 < a < 1)$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 A の固有値を求めよ。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ。

問題 3

以下の問いに答えよ。

- (1) X_1 を位相空間とし, Y_1 をハウスドルフ空間とする。 X_1 から Y_1 への連続な単射 f_1 が存在すると仮定する。このとき X_1 はハウスドルフ空間であることを証明せよ。

- (2) X_2 を位相空間とし, Y_2 を離散空間とする。 X_2 から Y_2 への連続な全単射 f_2 が存在すると仮定する。このとき f_2 は同相写像であるか? f_2 が同相写像であるといえるならば, そのことを証明せよ。 f_2 は同相写像であるとは限らないならば, そのような例をあげよ。

問題 4

G を群とし, H_1 と H_2 を G の部分群とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $H_1 \cap H_2$ は G の部分群になることを証明せよ。
- (2) H_1 と H_2 が G の正規部分群ならば, $H_1 \cap H_2$ は G の正規部分群になることを証明せよ。
- (3) $H_1 \cup H_2 = G$ ならば, $H_1 = G$ または $H_2 = G$ となることを証明せよ。

問題 5

離散グラフに関する以下の問いに答えよ。

- (1) グラフが木であることの定義を述べよ。
- (2) 頂点数が2以上の木は次数1の頂点を二つ以上持つことを証明せよ。
- (3) 頂点数 n の木は $n-1$ 本の辺をもつことを証明せよ。
- (4) 正八面体グラフの全域木を同型なものを除いてすべて列挙せよ。

問題 6

X_1, \dots, X_n は独立に同一のポアソン分布 $P_o(\theta)$ に従うとする。そのとき、 X_i の確率（量）関数は

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} \quad (x_i = 0, 1, 2, \dots; \theta > 0)$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

- (1) X_i の積率母関数 $g(t) = E(e^{tX_i})$ を求めよ。
- (2) X_i の原点周りの1次モーメント（期待値） $\mu'_{1,\theta} = E(X_i)$ を積率母関数 $g(t)$ を用いて求めよ。
- (3) θ のモーメント推定量を求めよ。