平成２７年度第１次募集(平成２６年１０月入学を含む。)
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　入　試

数理物質科学専攻
数理科学
A3

専門科目（数　学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は，表紙を含めて全部で7ページあります。
3. 試験時間は，９：００～１１：００　です。
4. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

　問題冊子１部，解答用紙３枚，下書用紙２枚

5. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題　1

次の各問いに答えよ。

(1)　次の定積分の値を求めよ。

(i) $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$

(ii) $\displaystyle \int_{-1}^{1} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx$

(2)　次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_D \cos(x+y)\sin(x-y)\,dxdy$$

$$\left(D = \left\{(x,y)\,\middle|\, 0 \leqq x+y \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq x-y \leqq \frac{\pi}{2}\right\}\right)$$

(3)　次の広義積分の値を求めよ。

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\,dxdy \qquad (D=\mathbb{R}^2)$$

問題　2

行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

の相異なる固有値を α，β とし，α の重複度を 2 とする。E を 3 次の単位行列とする。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，$\mathbf{0}$ は零ベクトルとする。

(1) α，β を求めよ。

(2) $(A-\beta E)\boldsymbol{p}_1 = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p}_1$ を一個求めよ。

(3) $(A-\alpha E)\boldsymbol{p}_2 = \mathbf{0}$ および $(A-\alpha E)\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2$ を満たすベクトルの組 $\{\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ で，線形独立なものを一個求めよ。

(4) (2), (3) で求めたベクトル $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ を列ベクトルとする行列 $P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ を作る。$P^{-1}AP$ を求めよ。

問題　3

閉区間 $[0,1]$ で定義された実数値連続関数全体を $C([0,1])$ とする。$f \in C([0,1])$ に対して，

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

とする。また，Kf を

$$(Kf)(t) = \int_0^t (t-s) f(s) \, ds \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

により定める。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $f \in C([0,1])$ に対して，$\|Kf\| \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \|f\|$ が成り立つことを示せ。

(2) n を自然数とする。$K^{n+1}f = K(K^n f)$ と定める。このとき，任意の自然数 n と $f \in C([0,1])$ に対して，

$$(K^n f)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s) \, ds$$

が成り立つことを示せ。

問題　4

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

を行列の乗法に関する群とする。e を単位元とする群 G について，次の各問いに答えよ。

(1) すべての G の要素 x に対して，$x^2 = e$ が成り立つならば，G は可換群であることを示せ。

(2) G が4個の要素からなるとき，可換群であることを示せ。

(3) G が4個の要素からなるとき，G は R または D と同型であることを示せ。

問題　5

座標平面の曲線 α を

$$\alpha(t) = (\cos^3 t \cos 3t,\ \cos^3 t \sin 3t)$$

とする。すべての t に対して $\alpha(t+p) = \alpha(t)$ を満たす p を α の周期とよぶ。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　α の正の最小周期 p_0 を求めよ。

(2)　$\alpha(a) = \alpha(b)$, $0 \leqq a < b < p_0$, となる a, b を求めよ。また，そのときの点 $\alpha(a)$ も求めよ。

(3)　α の長さを求めよ。

問題　6

次の線形計画問題について考える。

$$
(\mathrm{LP})\begin{cases}
\text{最小化} & x_1 + x_2 \\
\text{制約条件} & 8x_1 + x_2 \geqq 8 \\
 & 3x_1 + x_2 \geqq 6 \\
 & 5x_1 + 3x_2 \geqq 15 \\
 & x_1 + 3x_2 \geqq 9 \\
 & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0
\end{cases}
$$

このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 座標平面上に問題 (LP) の実行可能領域と目的関数の等高線を図示し，問題 (LP) の最適解と最適値を求めよ。

(2) 問題 (LP) の双対問題 (D) を記述せよ。

(3) (2) で求めた双対問題 (D) をシンプレックス法によって解き，双対問題 (D) の最適解と最適値を求めよ。ただし，シンプレックス法の計算過程も記述すること。