平成２６年度第２次募集（平成２６年１０月入学含む。）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　入　試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 試験時間は　９：００～１１：００　です。
3. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚，下書用紙２枚

4. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
5. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
6. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題　1

次の問いに答えよ。

(1) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$$

となることを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\cos x}dx$ の値を求めよ。

(3) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{2+\sin x}dx$ を求めよ。

問題　2

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　A の行列式 $|A|$ を求めよ。

(2)　A の固有値をすべて求めよ。

(3)　各固有値に対する固有ベクトルを一つ求めよ。

(4)　$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ。

(5)　正の整数 n に対して，A^n を求めよ。

問題 3

二つの元 σ, τ で生成され，基本関係式 $\sigma^5 = 1$, $\tau^2 = 1$, $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$ で定まる群を G とする。すなわち，G を位数 10 の二面体群とする。次の問いに答えよ。

(1) G のすべての元とその位数を求めよ。

(2) G の部分群をすべて求めよ。

(3) (2) で得られたもののうち，正規部分群を選びその理由を述べよ。

(4) G の中心 $Z(G)$，G の交換子群 $D(G)$ をそれぞれ求めよ。

問題 4

座標系 (x, y, z) をもつ3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 中に，2つの平面 $x = a$, $z = y\tan\theta$ で決まる直線 ℓ がある。ただし，a および θ $(0 < \theta < \pi/2)$ は定数である。直線 ℓ を z 軸の回りに回転させて得られた曲面を S とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 曲面 S の方程式が

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{\tan^2\theta} = a^2$$

で与えられることを示せ。

(2) 特に $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ として，点 $\mathrm{P}(a, a, a)$ における曲面 S の接平面 H の方程式を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(a, a, a)$ を通り，(2) の接平面 H に対して垂直な直線 ℓ_{P} のパラメータ表示を求めよ。

問題 5

$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とし，n は正の整数とする。$\mathbb{R}$ の直積 $\mathbb{R}^2$ の点 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ に対して

$$d(x, y) = \max\left\{|x_1 - y_1|,\ |x_2^n - y_2^n|\right\}$$

と定義する。次の問いに答えよ。

(1) $n = 2$ のとき，$(\mathbb{R}^2, d)$ は距離空間にならないことを示せ。

(2) $n = 3$ のとき，$(\mathbb{R}^2, d)$ は距離空間になることを示せ。

(3) $(\mathbb{R}^2, d)$ が距離空間になるための n の条件を求めよ。

問題 6

連続型確率変数 X, Y はどちらも閉区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従っている。それらの変数の同時確率密度関数を $f(x, y)$ とすると，同時累積分布関数 $F(x, y)$ は

$$F(x,y) = P_{X,Y}(X \leq x, Y \leq y) = \int_0^y \left(\int_0^x f(x', y') dx' \right) dy'$$

と与えられる。二つの確率変数 X, Y が以下の関係性をもっている場合の $F(x, y)$ をそれぞれ求めよ。

(1) 確率変数 X, Y が互いに独立の場合。

(2) 確率変数 X, Y が関係式 $X = Y$ を満たす場合。

(3) 確率変数 X, Y が関係式 $X + Y = 1$ を満たす場合。