平成２６年度第２次募集（平成２６年１０月入学含む。）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

数理物質科学専攻

物理学

Ａ１

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で５ページある（表紙は含まない）。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１８０分である。

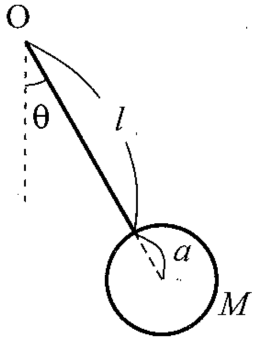
6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

質量 M の剛体の任意の軸のまわりの慣性モーメント I は，その軸と剛体の質量中心との距離を h，剛体の質量中心を通りその軸に平行な軸のまわりの慣性モーメントを I_G とすると，次の式で表される。

$$I = I_{\mathrm{G}} + Mh^2$$

図のように，質量の無視できる長さ l の棒に，半径 a，質量 M の円板を取り付けた振り子を考える。棒の一端を原点Oとし，円板の中心は棒の延長線上にある。振り子は円板と平行な面内を振動し，棒と鉛直線のなす角度を θ とする。重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。



(1) この円板の，円板に垂直で円の中心を通る軸のまわりの慣性モーメントが $I_{\mathrm{G}} = \dfrac{Ma^2}{2}$ となることを示せ。

(2) 原点Oのまわりの振り子の慣性モーメント I_0 を求めよ。

(3) 振り子が上図のような位置にあるとき，この振り子に働く重力について，原点のまわりの力のモーメントの大きさと向きを求めよ。

(4) θ についての運動方程式を書け。

以下では，角度 θ が十分小さく，$\sin\theta \approx \theta$ と近似できるとする。

(5) 時刻 $t = 0$ に $\theta = \theta_0$ で振り子を静かに離した。振り子の運動方程式を解け。

(6) この振り子の周期 T を求めよ。

(7) 長さ $l + a$ の糸に質量 m の質点を取り付けた単振り子に比べて，この振り子の周期は何倍になっているか。

[2]

次の設問（I）と（II）にそれぞれ答えよ。真空の誘電率を ε_0，真空の透磁率を μ_0，位置ベクトルを $\vec{r}=(x,y,z)$，時間を t とする。

（I） ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})=a\,\vec{r}$ がある。ここで，a は正定数である。

(1) ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ の発散 $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{r})$，および回転 $\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{r})$ をそれぞれ求めよ。

(2) ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ を真空中の電場ベクトルと見なすとき，電荷体積密度 $\rho(\vec{r})$ を求めよ。

(3) ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r})$ を真空中の磁束密度ベクトルと見なすことはできない。その理由を述べよ。

（II） 電荷も電流もない真空中では，電場ベクトル $\vec{E}(\vec{r},t)$ と磁束密度ベクトル $\vec{B}(\vec{r},t)$ について，次の方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} \text{(i)} & \dfrac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}=\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\,\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) \\[2ex] \text{(ii)} & \dfrac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}=-\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) \end{cases}$$

いま，電場ベクトル $\vec{E}(\vec{r},t)$ と磁束密度ベクトル $\vec{B}(\vec{r},t)$ の各成分がそれぞれ，次のように与えられている。

$$\begin{cases} E_x(\vec{r},t)=E_0\cos(kz-\omega t) \\ E_y(\vec{r},t)=0 \\ E_z(\vec{r},t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x(\vec{r},t)=0 \\ B_y(\vec{r},t)=B_0\cos(kz-\omega t) \\ B_z(\vec{r},t)=0 \end{cases}$$

ここで，E_0，k，および ω は正定数，B_0 は実定数である。

(1) 与えられた電場ベクトル $\vec{E}(\vec{r},t)$ と磁束密度ベクトル $\vec{B}(\vec{r},t)$ の組は，z 方向へ伝わる電磁波を表す。この電磁波が伝わる速さ c を，k と ω を用いて表せ。

(2) 方程式 (i) の x 成分，および方程式 (ii) の y 成分をそれぞれ，B_0，E_0，k，t，z，ω，ε_0，μ_0 のうち必要なものを用いて書け。

(3) c と B_0 をそれぞれ，E_0，ε_0，μ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

[3]

(I) 量子化された一次元調和振動子 N 個が温度 T の熱平衡状態にある。
i 番目 ($i=1,\cdots,N$) の振動子の角振動数を ω_i とすると，基底状態を基準に測ったエネルギーは

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i\,, \qquad E_i = n_i \hbar\omega_i\,, \qquad (\, n_i = 0,1,2,\cdots\,)$$

で与えられる。ここで，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ であり，h はプランク定数である。ボルツマン定数を k として，以下の問いに答えよ。なお，解答には $\beta = \dfrac{1}{kT}$ を用いてよい。

(1) この調和振動子系の分配関数 $Z_N(\beta)$ を計算せよ。

(2) この調和振動子系の全エネルギーの期待値 $\langle E\rangle$ を計算せよ。また，i 番目の振動子のエネルギーの期待値 $\langle E_i\rangle$ を答えよ。

(3) この調和振動子系の全エネルギーの揺らぎ ΔE を計算せよ。また，i 番目の振動子のエネルギーの揺らぎ ΔE_i が次式を満たすことを示せ。

$$(\Delta E_i)^2 = \hbar\omega_i \langle E_i\rangle + \langle E_i\rangle^2$$

(II) 体積 V の箱の中に気体分子 N 個が入れられている。いま箱の中に固定された微小領域（体積 v）をとる。気体分子は古典統計に従うとして，以下の問いに答えよ。

(1) 微小領域に気体分子一個が入る確率 $p = \dfrac{v}{V}$ を用いて，微小領域に気体分子 n 個が入る確率 P_n を表せ。

(2) 気体の数密度 $\rho = \dfrac{N}{V}$ を一定に保って $N \to \infty$ の極限を考えることにより，

$$P_n = \frac{a^n}{n!}\, e^{-a}\,, \qquad a = \rho v$$

となることを示せ。必要なら次の公式を用いてよい。

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = e^x\,.$$

(3) 微小領域に入る気体分子の個数の期待値 $\langle n\rangle$ およびその分散 $(\Delta n)^2$ を求め，$(\Delta n)^2$ を $\langle n\rangle$ で表せ。

[4]

ポテンシャル $V(x)$ のもとで一次元的な運動をする質量 m の粒子が量子力学的なエネルギー固有状態にあるとする。エネルギー固有値を E とすると，粒子の波動関数 $\psi(x)$ は以下のような時間によらないシュレディンガー方程式に従う。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

ここで，$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ であり，h はプランク定数である。以下では $E>0$ の解を考えることにする。

(I) まず，以下のような階段型ポテンシャルを考える。ただし，V_0 は正の定数であるとする。

$$V(x)=-V_0 \qquad (x<0)$$
$$V(x)=0 \qquad (x>0)$$

x の負の領域から正の向きに進む粒子が壁で反射される場合，波動関数は以下のように書ける。

$$\psi(x)=e^{ikx}+A\,e^{-ikx} \qquad (x<0)$$
$$\psi(x)=B\,e^{ik'x} \qquad (x>0)$$

ここで，$k=\dfrac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}$，$k'=\dfrac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$ で，A と B は定数である。なお，以下の問いでは，解答に k および k' を用いてもよい。

(1) 波動関数の接続条件から A および B を求めよ。

(2) $x<0$ および $x>0$ のそれぞれの領域における確率の流れ $J(x)$ を求めよ。ただし，$J(x)$ は以下のように定義される。

$$J(x)=\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\psi^*(x)}{\mathrm{d}x}\psi(x)\right]$$

(3) 反射率および透過率を求めよ。

(Ⅱ) 次に，以下のようなデルタ関数型のポテン　シャルを考える。

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m}\,\Omega\,\delta(x)$$

ここで，$\delta(x)$ はデルタ関数であり，Ω は正の定数であるとする。前問と同様に x の負の領域から正の向きに進む粒子を考えると，波動関数は以下のように書ける。

$$\psi(x) = e^{ipx} + C\,e^{-ipx} \qquad (x < 0)$$
$$\psi(x) = D\,e^{ipx} \qquad (x > 0)$$

ここで，$p = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$ で，C と D は定数である。なお，以下の問いでは，解答に p を用いてもよい。

(1) この場合はポテンシャルが有界でないので，波動関数の微係数 $\psi'(x)$ は $x = 0$ において連続でない。波動関数の接続条件の一つとして，以下の式が成り立つことを示せ。

$$\lim_{x\to+0}\psi'(x) - \lim_{x\to-0}\psi'(x) = 2\,\Omega\,\psi(0)$$

(2) 波動関数の接続条件から C および D を求めよ。

(3) 反射率および透過率を求めよ。