平成２６年度第１次募集（平成２５年１０月入学を含む。）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　入　試

（数理物質科学専攻）

（数理科学）

（A3）

数　学

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 試験時間は　９：００～１１：００　です。
3. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚，下書用紙２枚
4. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
5. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
6. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

新潟大学大学院自然科学研究科

新潟大学大学院自然科学研究科

問題　1

実数 r は $0 < r < 1$ を満たすとする。$\mathbb{R}^2$ を 2 次元ユークリッド空間とし，

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}, \quad S_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le r,\ |y| \le r\}$$

とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 重積分 $\displaystyle\iint_{D_r} \sin(x^2+y^2)\,dxdy$ を求めよ。

(2) 等式

$$\iint_{S_r} \sin(x^2+y^2)\,dxdy = 8\int_0^r \sin(x^2)\,dx \int_0^r \cos(x^2)\,dx$$

は成立するか。理由をつけて述べよ。

(3) 不等式

$$\pi \le \frac{8\displaystyle\int_0^r \sin(x^2)\,dx \int_0^r \cos(x^2)\,dx}{1-\cos(r^2)}$$

は成立するか。理由をつけて述べよ。

(4) 不等式

$$\frac{8\displaystyle\int_0^r \sin(x^2)\,dx \int_0^r \cos(x^2)\,dx}{1-\cos(r^2)} \le 2\pi(1+\cos(r^2))$$

は成立するか。理由をつけて述べよ。

$\boxed{\text{問題}\quad 2}$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値を求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を一つ求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_0=0,\ a_1=1,\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

と定めるとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問題　3

n を 3 以上の正整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ の位数が $n-1$ ならば n は素数であることを示せ。

(2) p を素数として，$n-1=2p$ の形になったとする。整数 a が，次の 3 条件

(i) $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$

(ii) $a^2 \not\equiv 1 \pmod{n}$

(iii) $a^p \not\equiv 1 \pmod{n}$

を満たせば，$[a]$ の $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ での位数は $n-1$ であることを示せ。ただし，$[a]$ は a を代表元とする $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ の元である。

(3) $[2]$ は $(\mathbb{Z}/59\mathbb{Z})^*$ の生成元であることを示せ。ただし，$[2]$ は 2 を代表元とする $(\mathbb{Z}/59\mathbb{Z})^*$ の元である。

問題　4

$\mathbb{R}^2$ を2次元ユークリッド空間とする。写像 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は，任意の $\mathbf{p}$，$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ に対して等式

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\| = \|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})\|$$

を満たすとする。ただし，$\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 任意の $\mathbf{p}$，$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ に対して，等式

$$f\left(\frac{\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2}\right) = \frac{f(\mathbf{p}) + f(\mathbf{q})}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 写像 $f_0:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f_0(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{O}), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$$

により定める。ただし，$\mathbf{O} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ である。このとき，任意の $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f_0(2\mathbf{p}) = 2f_0(\mathbf{p})$$

が成立することを示せ。

(3) (2) で定めた写像 f_0 は線形写像であることを示せ。

問題 5

離散グラフに対する次の問いに答えよ。

(1) グラフ G の直径 $d(G)$ および連結度 $\kappa(G)$ の定義を述べよ。

(2) 正十二面体グラフ D の直径 $d(D)$ および連結度 $\kappa(D)$ を求めよ。

(3) 正十二面体グラフ D はハミルトン閉路およびオイラー回路をもつか判定せよ。

問題 6

次の線形計画問題について，以下の問いに答えよ。

$$
\begin{array}{llc}
\text{(LP)} & \text{最小化} & 3x_1 + x_2 \\
 & \text{制約条件} & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\
 & & 5x_1 - 2x_2 \geq 4 \\
 & & -x_1 + 3x_2 \geq 2 \\
 & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

(1) 問題 (LP) の実行可能解の領域を図示して，グラフから最適解と最適値を求めよ。

(2) 問題 (LP) に対する双対問題 (D) を記述せよ。

(3) (2) で求めた双対問題 (D) をシンプレックス法によって解き，最適解と最適値を求めよ。