平成２５年度第２次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　入　試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数　学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚，下書用紙２枚

3. 問題冊子の問題部分は全部で６ページです。
4. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
5. 各解答用紙には，選択した問題番号と受験番号を指定された箇所に必ず記入してください。解答用紙は，解答しない場合でも３枚とも提出してください。
6. 試験時間は　９：００～１１：００　の120分です。
7. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題　1

次の問いに答えよ。

(1) 広義積分

$$\int_0^1 \log x \, dx$$

を計算せよ。

(2) 広義積分

$$\int_0^1 (\log x)^2 dx$$

を計算せよ。

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0)$$

が収束する α の値の範囲を求めよ。

問題　2

次の (I), (II), (III), (IV) について考える。

(I) 3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(II) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(III) 連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 6y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 8z & = & 1 \end{array} \right. \qquad (*)$$

(IV) 行列 A により定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,　$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$

次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は 1 次従属であることを示せ。

(2) A の行列式 $|A|$ を求めよ。

(3) 連立 1 次方程式 $(*)$ を解け。

(4) f の像は $\mathbb{R}^3$ の部分空間になることを示し, その基底を求めよ。

(5) $f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ となるベクトル $\mathbf{p}$ と, f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{q}$ は 1 次独立であることを示せ。

問題　3

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad b_n = a_n + \frac{1}{n(n!)}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

によって定義する。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は単調増加, $\{b_n\}$ は単調減少であることを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は有界であることを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は収束し, 同じ極限値をもつことを示せ。

問題 4

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において, (x, y, z) を座標系とし, 曲面 $S : z = 2x^2 + y^2 + 1$ と S 上の点 P $(a, b, 2a^2 + b^2 + 1)$ を考える。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) P における S の接平面 H_{P} の方程式を求めよ。

(2) P を通り H_{P} に垂直な直線 ℓ_{P} のパラメータ表示を求めよ。また, ℓ_{P} と平面 $z = 0$ の交点 $\mathrm{Q_P}$ の座標を求めよ。

(3) H_{P} が原点を通るように P を S 上で動かすものとする。$\mathrm{Q_P}$ の軌跡を求めよ。

(4) H_{P} が原点を通るように P を S 上で動かすものとする。P と $\mathrm{Q_P}$ の距離の最大値と, そのときの P の座標を求めよ。

問題　5

$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表すとし,

$$X = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},\quad Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},\quad ac \neq 0 \right\}$$

とおいて, X の 0 以外の元全体の集合を X^* とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) X^* は乗法で群になることを示せ。

(2) Y は行列の積で群になることを示せ。

(3) Y の元 $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix}$ の位数を求めよ。

(4) Y の位数を求めよ。

(5) 写像 $f : Y \longrightarrow X^*$ を, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ に対して $f(A) = a/c$ により定義すると, これは群の準同型写像であることを示せ。また, f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ を求めよ。

問題 6

次の線形計画問題について考える。

$$
(\mathrm{LP})\left\{\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 7x_1 + 6x_2 \\
\text{制約条件} & 5x_1 + 3x_2 \leqq 30 \\
 & 4x_1 + 6x_2 \leqq 42 \\
 & 7x_1 + 2x_2 \leqq 35 \\
 & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0
\end{array}\right.
$$

次の問いに答えよ。

(1) 座標平面 (x_1, x_2) に問題 (LP) の実行可能領域と目的関数の等高線を図示し，問題 (LP) の最適解と最適値を求めよ。

(2) 問題 (LP) の双対問題 (D) を記述せよ。

(3) (2) で求めた双対問題 (D) を 2 段階シンプレックス法によって解き，最適解と最適値を求めよ。