平成 25 年度第 1 次募集 (平成24年10月入学を含む。)
新潟大学大学院自然科学研究科
博士前期課程入学者選抜試験問題
一 般 入 試

(数理物質科学専攻)

(数理科学 A3)

数 学

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 試験時間は ９：００～１１：００ です。
3. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚，下書用紙２枚

4. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
5. 問題冊子は表紙、白紙を含めて８ページあります。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題 1

次の問いに答えよ。

(1) 次の数列の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n}$$

(2) 次の関数の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x + x^2}\right)$$

(3) 方程式 $x^3 + x^2 + ax + 1 = 0$ は負の解を持つことを示せ。ただし、a は定数とする。

問題 2

行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

と置き、写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ によって定義する。このとき、次の問いに答えよ。

(1) f の像空間 $f(\mathbb{R}^5)$ の基底を一組求めよ。

(2) 実数 a に対して

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$$

と置くとき、$\mathbf{y} \in f(\mathbb{R}^5)$ であるとする。このとき、a の値及びそのときの $\mathbf{y}$ を求めよ。

(3)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

とする。(2) で求めた $\mathbf{y}$ に対して、一次方程式

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

を解け。

問題　3

m と n を互いに素で1より大きい自然数とし、G を位数 mn のアーベル群とする。ここでは、G の演算は乗法的に表すとする。写像

$$F_n : G \longrightarrow G$$

を $F_n(g) = g^n$ で定める。写像 F_m も同様に定める。F_n の像 $\mathrm{Im}(F_n)$ を H_1 と置く。即ち、

$$H_1 = \{\ g \in G \ \mid\ G\text{のある元}\,h\,\text{に対して}\ g = h^n\text{と表される}\ \}$$

である。同様に、$H_2 = \mathrm{Im}(F_m)$ と置く。

このとき、次の問いに答えよ。

(1) F_n は準同型写像であることを示せ。

(2) G は H_1 と H_2 で生成される、即ち、

$$G = H_1 \cdot H_2$$

となることを示せ。

(3) $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ となることを示せ。

(4) K を G の部分群とする。このとき、ある H_1 の部分群 K_1 と H_2 の部分群 K_2 に対して、

$$K = K_1 \times K_2 \qquad \text{(内部直積)}$$

となることを示せ。

問題　4

$\rho > 1$、α は定数で、

$$S_\rho = \{\ (x, y) \mid\ x \geq 0,\ y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq \rho\},$$

$$F(\rho) = \int\int_{S_\rho} (x^2 + y^2)^{-\alpha/2} dxdy$$

とおくとき、次の問いに答えよ。

(1)　$F(\rho)$ を求めよ。

(2)　$\rho \to +\infty$ のとき、$F(\rho)$ の収束・発散を調べ、もし収束する場合はその極限値を求めよ。

問題　5

次の問いに答えよ。

(1) 次のことを示せ。

$$(0,1)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right)$$

(2) 距離空間 (X,d) はハウスドルフ空間であることを示せ。

(3) 距離空間 (X,d) において、X の部分集合 A がコンパクトならば、A は閉集合であることを示せ。

問題 6

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ は独立な確率変数列で、すべて以下の確率密度関数 $f(x\,;\,\theta)$ を持つ、区間 $[0, \theta]$ 上の一様分布に従うとする。

$$f(x\,;\,\theta) = \frac{1}{\theta} \cdot I(0 \leq x \leq \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & (0 \leq x \leq \theta), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

ここに、母数 $\theta\ (> 0)$ は定数で、$I(A)$ は集合 A の定義関数を表わす。このとき、次の問いに答えよ。

(1) X_1 の分布関数 $F(x\,;\,\theta) = P(X_1 \leq x)$ を求めよ。

(2) $\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の同時確率密度関数 $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n\,;\,\theta)$ を求めよ。

(3) $\mathbf{X}_n$ に基づく θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{MLE}(\mathbf{X}_n)$ を求めよ。

(4) $\hat{\theta}_{MLE}(\mathbf{X}_n)$ の分布関数 $F_n(x\,;\,\theta) = P\left(\hat{\theta}_{MLE}(\mathbf{X}_n) \leq x\right)$ を求めよ。

(5) $n \to +\infty$ のとき、$\hat{\theta}_{MLE}(\mathbf{X}_n)$ は θ に確率収束することを証明せよ。