平成２５年度第１次募集（平成２４年１０月入学含む。）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

（専攻名）数理物質科学専攻

（試験実施単位名）物理学コース

（記号）A1

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で８ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１８０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1] 設問（I）と（II）にそれぞれ答えよ。

（I）

ポテンシャル $V(x)$ のもとで x 軸上を運動する質量 m の質点を考える。時刻 t における質点の位置を $x(t)$ とし，$\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ とする。ポテンシャルは

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - F x$$

である。ここで，ω と F は正の定数である。$t = 0$ における初期条件を，a を正の定数として

$$x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = 0$$

と設定する。以下の問いに答えよ。

(1) 質点の運動方程式を書け。

(2) 質点のエネルギーを

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

とする。このとき，E を時間に関して微分することにより，E が時間変化しない保存量であることを示せ。

(3) 問 (1) で求めた運動方程式から，$y(t) = x(t) - \frac{F}{m\omega^2}$ が満たすべき微分方程式を書け。さらに，得られた微分方程式を解くことにより，$x(t)$ および $\dot{x}(t)$ を求めよ。

(4) 問 (3) で求めた $x(t)$ および $\dot{x}(t)$ を用いて E を直接計算し，エネルギー保存則が成り立つことを確かめよ。

(Ⅱ)

つぎに，時間に依存するポテンシャル $V(x,t)$ のもとで x 軸上を運動する質量 m の質点を考える。時刻 t における質点の位置を $x(t)$ とし，$\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ とする。ポテンシャルは

$$V(x,t) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - G\,t\,x$$

である。ここで，ω および G は正の定数である。$t=0$ における初期条件は，a を正の定数として

$$x(0) = a\,, \qquad \dot{x}(0) = 0$$

と設定する。以下の問いに答えよ。

(5) 質点の運動方程式を書け。

(6) 問 (5) で求めた運動方程式を解き，$x(t)$ を求めよ。

[2]

位置$\vec{r}=(x,y,z)$，時刻tにおける電場$\vec{E}(\vec{r},t)$と磁束密度$\vec{B}(\vec{r},t)$に対するマクスウェルの方程式は，空間の誘電率をε，透磁率をμとすると以下のように書くことができる。

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=0 \qquad \text{(i)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)+\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}=0 \qquad \text{(ii)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)/\varepsilon \qquad \text{(iii)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t)-\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}=\mu\vec{i}(\vec{r},t) \qquad \text{(iv)}$$

ここで$\rho(\vec{r},t)$は電荷密度，$\vec{i}(\vec{r},t)$は電流密度である。

(1) 式(i)－(iv)の意味を以下のように説明する。㋐－㋙に入るのに最も適した語句を下記のリストから選べ。ただし、同じ語句を複数回用いてもよい。

- 式(iii)は，電場に関する㋐の法則である。右辺の値は電場の発生源として㋑が存在することを示している。
- 式(ii)は，㋒の時間変化は㋓を生成するという㋔の法則を定式化したものである。
- 式(i)の右辺の値が 0 なのは，磁気㋕がないということを意味している。
- 式(iv)は，㋖によって㋗が作られるという㋘の法則を㋙の時間変動を考慮し一般化したものである。

語句リスト

アンペール，　ガウス，　オーム，　ファラデーの電磁誘導，
ジュール，　キルヒホッフ，　クーロン，　電荷，　磁荷，
単極子，　双極子，　電場，　電流，　エネルギー，　磁束密度

(2) 電荷密度および電流密度の値が全ての$\vec{r}$, tに対して 0 の場合を考える。この空間において，電場$\vec{E}(\vec{r},t)$および磁束密度$\vec{B}(\vec{r},t)$の満たす微分方程式が以下の形になることを式(i)−(iv)から導け。

$$-\vec{\nabla}^2\vec{E}(\vec{r},t)+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=0$$

$$-\vec{\nabla}^2\vec{B}(\vec{r},t)+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=0$$

必要があれば以下のベクトル演算公式を用いてよい。

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}$$

(3) 問(2)で導出した微分方程式の解を波数（波動）ベクトル$\vec{k}$, 角振動数ω，振幅$\vec{E}_0$および$\vec{B}_0$を用いて以下のように書くとする。

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)]$$
$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)]$$

このとき，$\vec{k}$とωが満たす関係式を求めよ。

(4) 問(3)で導入した電場と磁束密度の式とマクスウェル方程式(i)および(iii)を用いて電磁波が横波であることを示せ。

(5) 問(3)で導入した電場と磁束密度の式とマクスウェル方程式(ii)または(iv)を用いて磁束密度と電場は直交していることを示せ。

[3]

量子力学における角運動量$\vec{L}=(L_x,\ L_y,\ L_z)$について考える。$L_x,\ L_y,\ L_z$はエルミート演算子である。$|\psi_{l,m}\rangle$は$\vec{L}^2$と$L_z$の同時固有ベクトルであり，以下の固有値方程式を満たすとする。ここで，$\hbar=\frac{h}{2\pi}$であり，hはプランク定数である。

$$\begin{aligned} L_z|\psi_{l,m}\rangle &= m\hbar|\psi_{l,m}\rangle \\ \vec{L}^2|\psi_{l,m}\rangle &= l(l+1)\hbar^2|\psi_{l,m}\rangle \end{aligned}$$

固有ベクトルは，以下のように正規直交条件を満たすものとする。

$$\langle\psi_{l',m'}|\psi_{l,m}\rangle=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

また，$\vec{L}$のz成分 L_z に対する昇降演算子を，

$$L_+=L_x+iL_y, \qquad L_-=L_x-iL_y$$

と定義する。以下の問いに答えよ。

(1) 以下の関係を示せ。$[L_y,L_z]=i\hbar L_x$，$[L_z,L_x]=i\hbar L_y$，$[L_x,L_y]=i\hbar L_z$ の関係を用いてよい。

(i) $[L_\pm,L_z]=\mp\hbar L_\pm$

(ii) $[\vec{L}^2,L_z]=0$

(iii) $L_\pm L_\mp=\vec{L}^2-L_z^2\pm\hbar L_z$

(2) $L_+|\psi_{l,m}\rangle$が恒等的に 0 でないとする。このとき，$L_+|\psi_{l,m}\rangle$はL_zの固有ベクトルであり，その固有値が$(m+1)\hbar$となることを示せ。

問(2)で示されたことから，$|\psi_{l,m}\rangle$に昇降演算子$L_{\pm}$を作用させたベクトルを$|L_{\pm}\psi_{l,m}\rangle$とし，係数$C_{\pm}(l,m)$を用いて以下のように表すことができる。

$$|L_{\pm}\psi_{l,m}\rangle = L_{\pm}|\psi_{l,m}\rangle = C_{\pm}(l,m)|\psi_{l,m\pm1}\rangle$$

(3) $\langle L_{\pm}\psi_{l,m}|L_{\pm}\psi_{l,m}\rangle = \langle\psi_{l,m}|L_{\mp}L_{\pm}|\psi_{l,m}\rangle$ を示せ。

(4) $C_{\pm}(l,m)$は，位相を適当に選ぶことにより，

$$C_{\pm}(l,m) = \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}$$

と表せることを示せ。

(5) mがとり得る最大値m_{max}，および，最小値m_{min}が存在すれば，対応する固有状態に対して$L_{+}|\psi_{l,m_{max}}\rangle = 0$，および，$L_{-}|\psi_{l,m_{min}}\rangle = 0$となる。このことを用いて，$|\psi_{l,m}\rangle$において$m$がとりうる値を求めよ。

[4]

温度 T の熱浴と平衡状態にある 1 個の 1 次元調和振動子について，カノニカル分布を用いて考える。この調和振動子を古典力学と量子力学でそれぞれ扱い，得られる比熱の違いについて考察しよう。必要なら以下の積分公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{c^2}\right) dx = c\sqrt{\pi}$$

また，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ であり，h はプランク定数である。

古典力学では，質量 m，角振動数 ω の 1 次元調和振動子のエネルギーは

$$E(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

とかける。ここで p, q は，それぞれ位相空間での運動量と位置座標である。

(1) 古典的な分配関数 Z_1 およびヘルムホルツの自由エネルギー F_1 を求めよ。

(2) 系のエントロピー S_1 と比熱 C_1 を求めよ。

つぎに，量子力学的に 1 次元調和振動子を考えると，そのエネルギーは不連続的な値

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

であたえられる。ここで n は量子状態を区別する量子数である。

(3) 分配関数 Z_2 およびヘルムホルツの自由エネルギー F_2 を求めよ。

(4) 系のエントロピー S_2 と比熱 C_2 を求めよ。

(5) 比熱 C_2 の高温極限 $k_BT >> \hbar\omega$ での値を求め，問(2)で得られた C_1 と比較せよ。

(6) 比熱 C_2 の低温極限 $k_BT << \hbar\omega$ での近似式を求めよ。

(7) 横軸に絶対温度 T をとり，比熱 C_2 の概略図をかけ。