

令和2年度第2次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一般入試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は、表紙を含めて全部で7ページあります。
3. 試験時間は 9:00～11:00 です。
4. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。

問題冊子1部、解答用紙3枚、下書用紙2枚

5. 問題は全部で6題あります。そのうち3題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には、問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題 1

2変数関数

$$f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 1階偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ および2階偏導関数 $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ を求めよ。
- (2) $f(x, y)$ の極値を求めよ。
- (3) $D = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ における $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ。

問題 2

行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) A の行列式 $|A|$ を求めよ。
- (2) A の固有値をすべて求めよ。
- (3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ。
- (4) 自然数 n に対して、 A^n を求めよ。

問題 3

p, q は正の実数で $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすものとする。次の問いに答えよ。

(1) 正の実数 x, y に対して不等式 $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$ が成り立つことを示せ。

(2) 実数 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ に対して不等式

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 実数 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ に対して不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つことを示せ。

問題 4

4 × 4 行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して、 $G = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ を行列の乗法に関する位数 8 の群とする。次の問いに答えよ。

- (1) G は I と J で生成されることを示せ。
- (2) G の中心を求めよ。
- (3) G の交換子群を求めよ。
- (4) G の部分群をすべて求めよ。
- (5) G の正規部分群 N で剰余群 G/N が G の部分群と同型ではない N を求めよ。

問題 5

3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の曲線 $\mathbf{p}(t) = (3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$ ($-\infty < t < +\infty$) を C で表す。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の点 $\mathbf{p}(2)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C の点 $\mathbf{p}(2)$ における接触平面を求めよ。

問題 6

次の線形計画問題について考える。

$$(LP) \begin{cases} \text{最大化} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 18 \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

- (1) 座標平面 (x_1, x_2) 上に問題 (LP) の実行可能領域と目的関数の等高線を図示し、問題 (LP) の最適解を求めよ。
- (2) 問題 (LP) の双対問題 (D) を記述せよ。
- (3) (2) で求めた双対問題 (D) をシンプレックス法で解き、双対問題 (D) の最適解を求めよ。ただし、シンプレックス法の計算過程も記述すること。