

令和2年度第1次募集（令和元年10月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一般入試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は、表紙を含めて全部で7ページあります。
3. 試験時間は 9:00～11:00 です。
4. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。

問題冊子1部，解答用紙3枚

5. 問題は全部で6題あります。そのうち3題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には、問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 下書きは、問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ってください。

問題 1

2変数関数

$$f(x, y) = (2x^2 + y^2) e^{-x^2 - 2y^2}$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) 1階偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ。
- (2) 2階偏導関数 $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ を求めよ。
- (3) 関数 $f(x, y)$ の極値を調べよ。

問題 2

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ。
- (3) 自然数 n に対して, A^n を求めよ。
- (4) 自然数 n に対して, $A^n = (A^{-1})^n$ であることを示せ。

問題 3

S を位相空間とし, N を S の部分集合とする。集合 M の閉包 \overline{M} は, M を含む最小の閉集合とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 開集合 O が $O \cap \overline{N} \neq \emptyset$ をみたせば, $O \cap N \neq \emptyset$ が成り立つことを示せ。ただし \emptyset は空集合である。
- (2) N が連結ならば, \overline{N} は連結であることを示せ。
- (3) T を位相空間とし, f を S から T への連続写像とする。 N が連結ならば, $\overline{f(N)}$ は連結であることを示せ。

問題 4

S_n を n 次対称群とし, A_n を n 次交代群とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) G_1, G_2 を群とし, $f: G_1 \rightarrow G_2$ を準同型写像とする。このとき, $\text{Ker } f$ は G_1 の正規部分群であることを示せ。
- (2) S_n から乗法群 $\{1, -1\}$ への準同型写像 f で, $\text{Ker } f = A_n$ であるようなものを一つ定めよ。
- (3) (2) で定めた f を利用し, $A_n (n > 1)$ の位数を求めよ。

問題 5

3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の曲線 $\mathbf{p}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ ($-\infty < t < \infty$) を C で表す。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の点 $\mathbf{p}(\pi)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C の点 $\mathbf{p}(\pi)$ における接触平面の方程式を求めよ。

問題 6

確率ベクトル (X, Y) の同時確率密度関数を

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & (0 < x < y < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とする。即ち、 c は $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$ を満たす正の定数である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 定数 c の値を求めよ。
- (2) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ と Y の周辺確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ。
- (3) 期待値 $E(XY)$ を求めよ。