令和２年度第１次募集（令和元年１０月入学含む）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

一　般　入　試

数理物質科学専攻

物理学

Ａ１

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

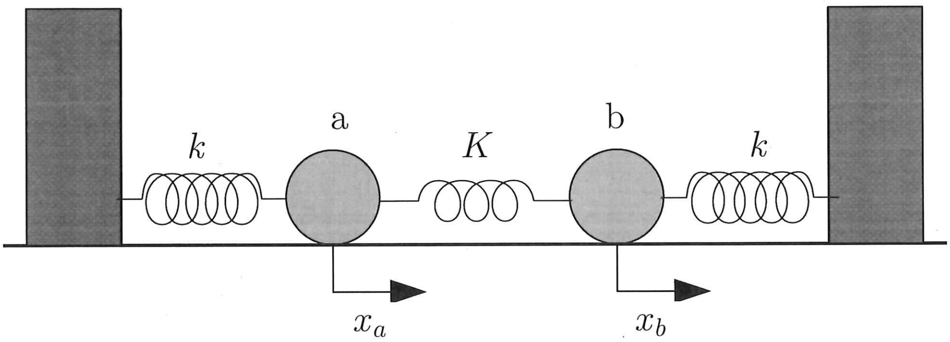
4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１２０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

図のように，質点 a と質点 b が，それぞれ，バネ定数 k のバネで固定壁に連結され，かつ，お互いがバネ定数 K のバネで連結されている。質点の質量はともに m である。質点とバネは常に一直線上にあり，質点どうしや壁との衝突は考えない。また，床との摩擦や空気抵抗は無視できるものとする。このとき，以下の問いに答えよ。



固定壁の間隔を調整して，バネがすべて自然長になるようにした。この位置からの，質点 a および質点 b の変位を，右向きを正として，x_a および x_b で表す。

(1) この質点系のラグランジアンを書け。

(2) 質点 a および質点 b の運動方程式を書け。

この質点系には固有振動が二つ存在する。固有角振動数 ω_n $(n = 1, 2)$ に対応する解を

$$\begin{pmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \cos \omega_n t$$

の形に仮定すると，問 (2) の運動方程式は，行列の形

$$\begin{pmatrix} \omega_n^2 - \Omega^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \omega_n^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に表すことができる。

(3) 正の定数 Ω および λ を，m，k および K を用いて表せ。

(4) 固有角振動数 ω_n $(n = 1, 2)$ を決定する方程式を書け。さらに，ω_1 および ω_2 を求めよ。ただし，$\omega_1 < \omega_2$ とする。

(5) ω_1 に対応する固有振動の振幅は $B_1 = A_1$ を満たし，ω_2 に対応する振幅は $B_2 = -A_2$ を満たす。このことを説明せよ。

問 (2) の運動方程式の一般解のうち，初速度が 0 のものは次の形に書くことができる。

$$\begin{pmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix} \cos\omega_1 t + \begin{pmatrix} A_2 \\ -A_2 \end{pmatrix} \cos\omega_2 t\ .$$

(6) 初速度が 0，かつ，$x_a(0) = A$ および $x_b(0) = 0$ を初期条件とする解を書け。なお，解を表すのに ω_1 および ω_2 を用いてよい。

(7) $K/k \ll 1$ の場合，および，$K/k \gg 1$ の場合のそれぞれについて，運動の特徴を簡単に述べよ。

[2]

(I)

真空中に，一様な電荷密度 ρ で分布する半径 R の球状の電荷が存在する。真空中の誘電率を ε_0 として，以下の問いに答えよ。

(1) ガウスの法則を用いて，電場の強さを球の中心からの距離 r の関数として求めよ。

(2) 問 (1) で求めた電場の強さを，横軸を r，縦軸を電場の強さとしてグラフに表せ。

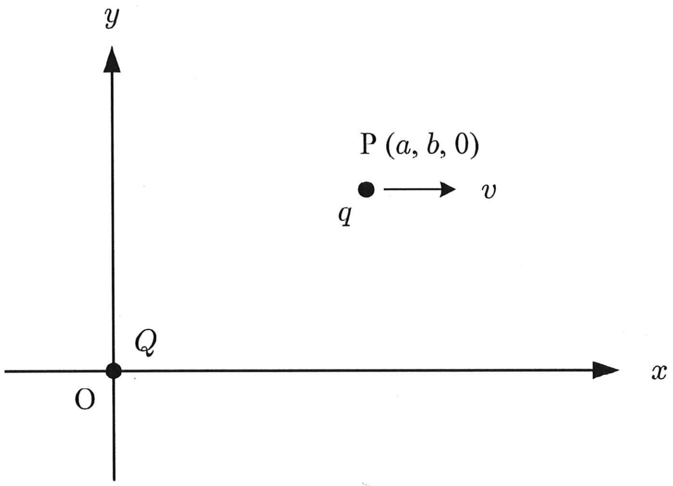
(3) 無限遠の電位を 0 として，電位を r の関数として求めよ。

(4) 真空中に，一様な電荷密度 ρ で分布する半径 r' の球状の電荷が存在する場合を考える。電荷密度を保ちながら，その半径が $\Delta r'$ だけ大きくなるように電荷を無限遠から運んでくるときに必要な仕事を求めよ。ここで，$\Delta r'$ は十分に小さいとして，増える分の球殻状に分布する電荷の体積は $4\pi r'^2 \Delta r'$ とする。

(5) 一様な電荷密度 ρ で分布する半径 R の球状の電荷の静電エネルギーは，問 (4) で求めた仕事を半径 0 から R まで加えあわせた全仕事と等しい。この静電エネルギーを求めよ。

(II)

図のように，真空中に，正の電荷 Q の粒子が原点 O に，正の電荷 q の粒子が点 P$(a, b, 0)$ に存在したとする。ここで，a と b は正とし，真空中の誘電率を ε_0 として，以下の問いに答えよ。



(1) 点 P の粒子が原点 O にいる粒子から受ける力 $\vec{F}$ の各成分 F_x, F_y, F_z を求めよ。

(2) 点 P の位置で，正の電荷 q の粒子が速度 $\vec{v} = (v, 0, 0)$ をもち，磁束密度 $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ による力を受けたとき，粒子が受ける全ての合力は $\vec{F}_{all} = (f, 0, 0)$ であった。このときの磁束密度の各成分 B_x, B_y, B_z を求めよ。ここで，v と f は正とする。

[3]

ボルツマン定数を k として，以下の問題 (I)，(II) に答えよ。

(I)

N 個の独立な原子からなる系が，温度 T，磁束密度の大きさが B の磁場の下で熱平衡状態にある。各原子は大きさ μ の磁気モーメントをもち，エネルギーが $\pm\mu B$ の 2 つの量子状態のみをとりうる。

(1) 分配関数 $Z(T, B)$，および，ヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, B)$ を求めよ。

(2) エントロピー $S(T, B)$ を求めよ。

(3) $B \neq 0$ のとき，高温 $kT \gg \mu B$，および，低温 $kT \ll \mu B$ において，$S(T, B)$ の近似式をそれぞれ求めよ。ただし，温度 T をあらわに含む表式で答えよ。

(4) $B \neq 0$ のとき，$S(T, B)$ を温度 T の関数として図示せよ（概略図で良い）。ただし，図中には，横軸に $\mu B/k$，縦軸に低温および高温の極限における S の値を記入せよ。

(5) 温度 T_1，磁場 B_1 にある状態から，磁場を断熱的に B_2 まで減らしたとき，温度は T_2 となった。T_2 を求めよ。

(6) この系は，$B = 0$ のとき熱力学の第 3 法則が成り立たないことを示せ。また，その理由を説明せよ。

(II)

絶対零度における理想フェルミ気体は，パウリ原理によって，フェルミエネルギー ε_F 以下のエネルギーをもつ全ての量子状態に粒子が 1 個ずつ占有され，一方，ε_F より高いエネルギーをもつ量子状態は全て非占有となる。絶対零度から温度が上昇したとき，低温 $kT \ll \varepsilon_F$ における比熱の温度依存性は，定性的に以下のように理解できる。(a)～(e) にあてはまる式をそれぞれ答えよ。また，エネルギーが ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間にある量子状態の数を $D(\varepsilon)d\varepsilon$ として，簡単のために $D(\varepsilon)$ が ε_F 付近では ε によらず一定である場合を考える。この場合，低温 $kT \ll \varepsilon_F$ において，化学ポテンシャルは ε_F のまま一定として良い。

絶対零度から温度が T だけ上昇したとき，熱的な励起によって粒子は $\boxed{\text{(a)}}$ の程度のエネルギーを得るが，ε_F よりも十分に低いエネルギーの量子状態にある粒子は $\boxed{\text{(a)}}$ のエネルギーを得ても行き先の状態が他の粒子によって占められているため，パウリ原理によって励起されえない。励起されるのは，ε_F から下の $\boxed{\text{(b)}}$ 程度のエネルギー領域にある量子状態を占めている粒子に限られる。その数はおよそ $\boxed{\text{(c)}}$ である。1 個の粒子が得るエネルギーは $\boxed{\text{(a)}}$ の程度だから，温度上昇によるエネルギーの増加は全体で $\boxed{\text{(d)}}$ と見積もられる。この結果，比熱は次元を持たない数係数を除いて $\boxed{\text{(e)}}$ のような温度依存性を示すことが分かる。

[4]

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$（h はプランク定数）として，以下の問題（I），(II）に答えよ。

(I)

実数値をもつ 1 次元ポテンシャル $V(x)$ の中におかれた質量 m の粒子について，時間に依存しないシュレーディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

を考える。確率の流れの密度 $j(x)$ は

$$j(x) = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{d\psi}{dx} - \psi\frac{d\psi^*}{dx}\right)$$

で与えられる。ここで，ψ^* は ψ の複素共役である。

(1) このシュレーディンガー方程式の解 $\psi(x)$ は確率の保存則

$$\frac{dj(x)}{dx} = 0$$

を満たすことを示せ。

いま，ポテンシャルが，正の定数 U_0 を用いて

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{\hbar^2 U_0}{2m} & (x > 0) \end{cases}$$

で与えられているとする。エネルギー E（ただし $E > \frac{\hbar^2 U_0}{2m}$）の粒子が，$x < 0$ の領域から $x > 0$ の領域へ入射するとして，以下の問 (2)~(5) に答えよ。

(2) $x < 0$ の領域には入射波と反射波が，$x > 0$ の領域には透過波のみがあることを考慮すると，各領域におけるシュレーディンガー方程式の解は，適当な定数 K, A, B を用いて次の形に書ける。

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A\,e^{-ikx} & (x \leq 0) \\ B\,e^{iKx} & (x > 0) \end{cases}$$

ここで，$k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ である。定数 K を求めよ。

(3) $x = 0$ での波動関数の接続条件を考えることにより，定数 A, B を求めよ。

(4) $x < 0$ および $x > 0$ の各領域における確率の流れの密度 $j(x)$ をそれぞれ求めよ。ただし，記号 K, A, B は，問 (2), (3) で求めた結果を代入せずに用いてよい。

(5) いま，入射波，反射波，透過波に対する確率の流れの密度を，それぞれ j_1, j_2, j_3 とすると，反射係数 R と透過係数 T は，それぞれ $R = |j_2/j_1|, T = |j_3/j_1|$ で定義される。R および T を求め，それらの間に成立している関係の物理的意味を説明せよ。

(II)

z 方向の一様な磁場中におかれた，相互作用をしている 2 つのスピン 1/2 の粒子の量子力学を考える。この系に対する全ハミルトニアンは

$$H = a\,\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + b\,(s_{1z} + s_{2z})$$

で与えられる。ここで，$\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ は，それぞれの粒子に対する $\hbar$ を単位とした（無次元の）スピン演算子，s_{1z}, s_{2z} はそれらの z 成分，a, b は実定数である。以下の問いに答えよ。

(1) この 2 粒子系に対する全スピン演算子を $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ と定義する。演算子 $\vec{S}^2$ 及び，$\vec{S}$ の z 成分 S_z の固有値をすべて書け。答えのみで良い。

(2) $\vec{S}^2 = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2)^2 = \vec{s}_1^{\,2} + \vec{s}_2^{\,2} + 2\,\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$ であることに注意して，ハミルトニアン H を，$\vec{S}$ と S_z を用いて書け。

(3) $a < 0, b < 0$ のとき，この系の基底状態とそのエネルギーを求めよ。