

平成31年度第2次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一般入試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目 (数学)

注意事項

1. この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は、表紙を含めて全部で7ページあります。
3. 試験時間は 9:00～11:00 です。
4. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。

問題冊子1部、解答用紙3枚

5. 問題は全部で6題あります。そのうち3題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には、問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 下書きは、問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ってください。

問題 1

$\alpha > 0$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

が収束する α の範囲を求め、そのときの積分の値を求めよ。

(2) 広義積分

$$\iint_{0 < x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy$$

が収束する α の範囲を求め、そのときの積分の値を求めよ。

(3) 広義積分

$$\iiint_{0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy dz$$

が収束する α の範囲を求め、そのときの積分の値を求めよ。

問題 2

行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) A を対称行列と交代行列の和として表せ。つまり、 $A = S + T$ を満たす対称行列 S と交代行列 T を求めよ。
- (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。
- (3) A は対角化可能であるかどうか理由をつけて答えよ。
- (4) $A^{2019} + 3A$ の固有値をすべて求めよ。

問題 3

(X, d) を距離空間とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) X の収束列はコーシー列であることを示せ。
- (2) X のコーシー列は有界列であることを示せ。
- (3) X のコーシー列の部分列はコーシー列であることを示せ。

問題 4

G を群とし, H を G の部分群とする。 $(G : H)$ を G における H の指数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) G の元 a, b に対して, $a^{-1}b \in H$ となることと, $aH = bH$ となることが同値であることを示せ。
- (2) $(G : H) = 2$ となるとき, H は G の正規部分群になることを示せ。
- (3) $(G : H) = 4$ で, H が G の正規部分群になると仮定する。このとき, G の H による剰余群 G/H は可換群になることを示せ。

問題 5

3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の曲線 $\mathbf{p}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ ($-\infty < t < +\infty$) を C で表す。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の点 $\mathbf{p}(0) = (1, 1, 0)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C の点 $\mathbf{p}(0) = (1, 1, 0)$ における接触平面の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C の曲率を求めよ。
- (4) 曲線 C の振率 (わいりつ) を求めよ。

問題 6

次の線形計画問題について考える。

$$(LP) \begin{cases} \text{最小化} & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{制約条件} & 3x_1 + x_2 \geq 16, \\ & x_1 + x_2 \geq 10, \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 25, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 座標平面 (x_1, x_2) 上に問題 (LP) の実行可能領域と目的関数の等高線を図示し、問題 (LP) の最適解を求めよ。
- (2) 問題 (LP) の双対問題 (D) を記述せよ。
- (3) (2) で求めた双対問題 (D) をシンプレックス法で解き、双対問題 (D) の最適解を求めよ。ただし、シンプレックス法の計算過程も記述すること。