平成３１年度第１次募集（平成３０年１０月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　入　試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページあります。
3. 試験時間は　９：００～１１：００　です。
4. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚

5. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 下書きは，問題冊子の余白を使用してください。
8. 試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

問題　1

ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は，$x > 0$ に対して，

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

で定義される。また，ベータ関数 $B(x, y)$ は，$x > 0, y > 0$ に対して，

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

で定義される。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して $\Gamma(n)$ を求めよ。

(2) $B(x, y) = B(y, x)$ を示せ。

(3) ガンマ関数とベータ関数は次式の関係をもつことを示せ。

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x, y)$$

(4) n が自然数であるとき，次の定積分 I を求めよ。

$$I = \int_{-1}^1 \left(1 - t^2\right)^n dt$$

問題　2

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値 α, β, γ を求めよ。ただし，α の重複度を 2 とする。

(2) 行列 A の各固有空間の基底を求めよ。

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ となるような行列 P を一つ求めよ。

$\boxed{問題\quad 3}$

複素数全体の集まりを $\mathbb{C}$ と表し，複素数を成分とする 3×3 行列の全体を $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ と表す。$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を行列演算によって $\mathbb{C}^3$ 上の線形作用素と考える。$\xi, \eta \in \mathbb{C}^3$ の内積を $\langle \xi, \eta \rangle$ と表す。$T \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ のとき，$T \geq 0$ は任意の $\xi \in \mathbb{C}^3$ に対して

$$\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$$

であることを意味し，T^* は T の共役転置行列を表す。また，

$$\ker T = \{\xi \in \mathbb{C}^3 | T\xi = 0\}$$

とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $P \geq 0$ および $P^2 = A^*A$ を満たす $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ を求めよ。

(2) $A = UP,\ UU^*U = U$ および $\ker U = \ker A$ を満たす $U \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ を求めよ。

問題　4

複素数全体の集まりを $\mathbb{C}$ と表し，$\mathbb{D} = \{a \in \mathbb{C} \mid |a| < 1\}$ とする。$a, b \in \mathbb{D}$ に対して，複素数の四則と共役の演算を用いて

$$a \oplus b = \frac{a+b}{1+\overline{a}b}$$

と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a \oplus b \in \mathbb{D}$ を示せ。

(2)　$a = \frac{1}{2}, b = \frac{i}{2}, c = \frac{2+2i}{-4+i}$ とするとき，$a \oplus (b \oplus c)$ および $(a \oplus b) \oplus c$ を求めよ。

(3)　$a, b \in \mathbb{D}$ に対して

$$a \oplus b = z(b \oplus a)$$

を満たす $z \in \mathbb{C}$ を a, b を用いて表せ。

(4)　$a, b, c \in \mathbb{D}$ に対して等式

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus (zc)$$

が成り立つことを示せ。ここで z は (3) で与えられるものとする。

問題 5

n 次元立方体グラフ Q_n $(n \geq 1)$ の頂点集合と辺集合をそれぞれ

$$V(Q_n) = \{(a_1, \ldots, a_n) | a_i \in \{0, 1\}\}, \quad E(Q_n) = \{xy | d_h(x, y) = 1, \ \ x, y \in V(Q_n)\}$$

とする。ただし，Q_n の頂点 $x = (a_1, \ldots, a_n)$ と $y = (b_1, \ldots, b_n)$ に対して，$d_h(x, y) = |\{i | a_i \neq b_i\}|$ と定義する。ここで，$|S|$ は集合 S に含まれる元の個数を表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) Q_n の頂点数，辺数をそれぞれ求めよ。

(2) Q_n の 2 頂点 x, y の距離が $d_h(x, y)$ と等しくなることを証明せよ。また，Q_n の直径を求めよ。

(3) Q_n が奇閉路を含まないことを証明せよ。

問題　6

確率変数 X は平均値 μ, 分散 σ^2 をもつ正規分布に従う。確率変数 Y は確率変数 X と $Y = e^X$ の関係にある。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 確率変数 Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ。ただし，確率変数 X の確率密度関数 $f_X(x)$ は,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

で与えられる。

(2) 確率変数 Y の平均値を求めよ。

(3) 確率変数 Y の中央値を求めよ。

(4) 確率変数 Y の最頻値を求めよ。