平成３１年度第１次募集（平成３０年１０月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一般入試

数理物質科学専攻
物理学
Ａ１

専門科目（物理学）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて全部で６ページある。

3　解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，１２０分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

図1のように，半径 a，質量 M の一様な円板が，水平面に固定された角度 θ の粗い斜面に沿って，すべらずに下向きに転がっている。円板の中心の斜面に沿った移動距離を x，円板の中心周りの回転角を φ，重力加速度の大きさを g とし，以下の問いに答えよ。

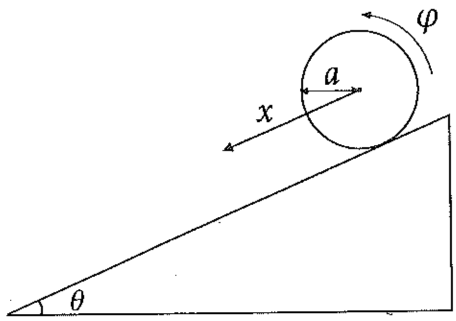


図1

(1) 円板の中心軸周りの慣性モーメントが $I = \frac{Ma^2}{2}$ になることを示せ。

(2) 円板に働く摩擦力の大きさを F とする。

(a) 円板の重心の斜面方向に沿った方向の運動方程式を書け。

(b) 円板の中心軸周りの力のモーメントの大きさと向きを求めよ。

(c) 円板の中心軸周りの回転角 φ についての運動方程式を書け。

(3) 円板がすべることなく斜面を転がるとき，$\dot{x} = a\dot{\varphi}$ の関係が成り立つことに注意し，以下の問いに答えよ。

(a) 円板の中心の斜面に沿って下向きの加速度 $\ddot{x}$ を g と θ を用いて表せ。

(b) 図2のように，斜面上の点Pにある円板が，静止した状態から斜面上を静かに転がりはじめ，鉛直方向に h だけ低い斜面上の点Qに到達した。円板が得た並進運動エネルギーと回転運動エネルギーをそれぞれ求めよ。また，その和が円板の失った位置エネルギーに等しいことを示せ。

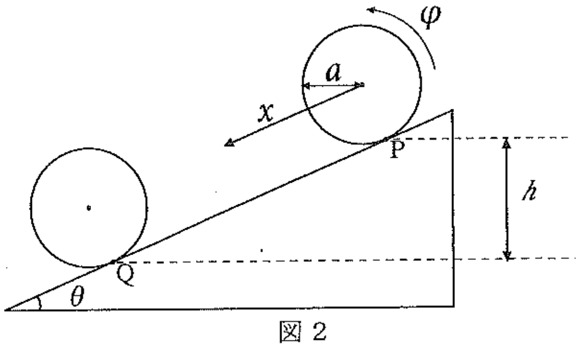
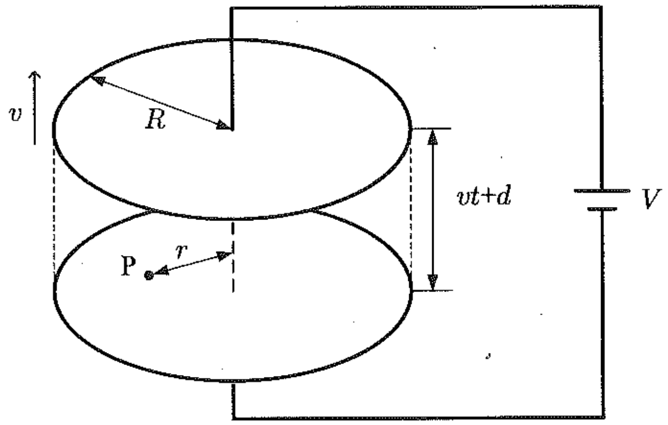


図2

[2]

図のように，真空中におかれた半径 R の円板形の極板を持つ平行板コンデンサーに内部抵抗が無視できる起電力 V の電池が接続されている。時刻 0 で極板の間隔は d であり，上側の極板が下側の極板から速さ v でゆっくりと離れていくとする。極板の半径 R が時刻 $t(\geq 0)$ のときの間隔 $vt+d$ に対して十分に大きく，極板間の電場は一様とする。真空中の誘電率を ε_0，透磁率を μ_0 として，以下の問いに答えよ。



(1) 時刻 0 のときの平行板コンデンサーの電気容量と蓄えられている静電エネルギーを求めよ。

(2) 時刻 0 から t までの間に電池がコンデンサーにする仕事を求めよ。

(3) 時刻 t のときの極板間に生じる電場の強さを求めよ。

(4) 時刻 t のときの極板間に発生する変位電流の密度の大きさ $i_d(t)$ が，次の式になることを示せ。

$$i_d(t) = \frac{\varepsilon_0 V v}{(vt+d)^2}$$

(5) 図のように，点 P は極板間にあり，極板の中心軸から点 P までの距離を r $(r \leq R)$ とする。点 P に生じる時刻 t のときの磁束密度の大きさを，マクスウェル-アンペールの法則を用いて求めよ。なお，時刻 t，位置 $\vec{r}$ における磁束密度を $\vec{B}(\vec{r},t)$，電場を $\vec{E}(\vec{r},t)$，電流密度を $\vec{i}(\vec{r},t)$ とすると，マクスウェル-アンペールの法則の積分形は，

$$\int_C \{\vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{k}(\vec{r})\}ds = \mu_0 \int_S \{\vec{i}(\vec{r},t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\}\cdot\vec{n}(\vec{r})dS$$

と表される。ここで，C は閉じた経路を，$\vec{k}(\vec{r})$ は C 上の単位接線ベクトルを表し，S は C に囲まれた曲面を，$\vec{n}(\vec{r})$ は S 上の単位法線ベクトルを表す。

(6) 一般にポインティング・ベクトル $\vec{S}(\vec{r},t)$ は，電場 $\vec{E}(\vec{r},t)$ と磁束密度 $\vec{B}(\vec{r},t)$ を用いて，次の式で定義される。

$$\vec{S}(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)$$

時刻 t のときの点 P におけるポインティング・ベクトルの大きさを求めよ。また，そのポインティング・ベクトルの向きを，次の選択肢ア～エの中から選べ。

ア：中心軸と平行で上向き，イ：中心軸と平行で下向き，ウ：中心軸と直交で外向き，
エ：中心軸と直交で内向き

(7) 時刻 0 から t までの間に極板間の空間から流出する電磁場のエネルギーの大きさが (2) で求めた仕事の大きさと等しいことを示せ。

[3]

2次元空間中の1辺Lの正方形の領域に，質量mの単原子分子の自由粒子N個からなる理想気体が閉じ込められており，絶対温度Tの熱平衡状態にある。ボルツマン定数をk_{B}，プランク定数hに対し$\hbar = h/(2\pi)$とし，以下の問いに答えよ。また，必要に応じて，スターリングの公式（$N \gg 1$で，$\ln N! \simeq N \ln N - N$）を用いよ。

(1) 1粒子の波動関数$\psi(x, y)$が周期的境界条件

$$\psi(x, y) = \psi(x + L, y) = \psi(x, y + L)$$

を満たすとき，運動する粒子の波数$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$はどのように量子化されるか示せ。

(2) 波数の大きさkに対する1粒子の状態密度を求めよ。

(3) 1粒子の分配関数を求めよ。

(4) N粒子系の分配関数を求めよ。ただし，この理想気体は古典的な統計で扱えるものとする。

(5) 内部エネルギーを求めよ。

(6) ヘルムホルツの自由エネルギーFを求めよ。

(7) エントロピーを求めよ。

(8) $A = L^2$とし，$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{T,N}$とする。状態方程式を導け。

[4]

(I)

質量 m の粒子が1次元ポテンシャル $U(x)$ の中を量子力学的に運動している。ポテンシャルが

$$U(x)=\begin{cases}\infty & x<0,\quad L<x\\ 0 & 0\le x\le L\end{cases}$$

であるとし，以下の問いに答えよ。ただし，プランク定数 h に対し，$\hbar=h/(2\pi)$ とする。

(1) 基底状態のエネルギー固有値を E_0，その規格化された固有波動関数を $\psi_0(x)$ とし，第一励起状態のエネルギー固有値を E_1，その規格化された固有波動関数を $\psi_1(x)$ とする。E_0，$\psi_0(x)$，および E_1，$\psi_1(x)$ を求めよ。

(2) 粒子の波動関数が

$$\chi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x)+i\psi_1(x))$$

で与えられるとき，粒子のエネルギー期待値を求めよ。

(3) 時刻 t における粒子の波動関数を $\phi(x,t)$ とする。初期条件が $\phi(x,0)=\chi(x)$ のとき，$\phi(x,t)$ を求めよ。

(4) (3) と同じ初期条件のとき，時刻 $t(>0)$ における粒子の確率密度分布が $t=0$ における確率密度分布と初めて同じになる時刻を求めよ。

(II)

エネルギー固有値 $E_0+\varepsilon$ と $E_0-\varepsilon$ を持つ2状態系のハミルトニアン $\hat{H}_0$ があり，それぞれのエネルギー固有値に属する規格化された固有ケットが，$|1\rangle$ および $|2\rangle$ で表されるとする。この2状態系に行列要素が，$\langle 1|\hat{V}|1\rangle=0$，$\langle 1|\hat{V}|2\rangle=\Delta$，$\langle 2|\hat{V}|1\rangle=\Delta^*$，$\langle 2|\hat{V}|2\rangle=0$ で与えられる摂動 $\hat{V}$ を加えた。ただし，Δ^* は Δ の複素共役である。以下の問いに答えよ。

(1) 全ハミルトニアン $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V}$ の行列表示を書け。

(2) $\hat{H}$ のエネルギー固有値を求めよ。

(3) $|\Delta|\ll\varepsilon$ のとき，$\hat{H}$ の固有値問題を縮退の無い摂動論を用いて近似的に解くことができる。$\hat{V}$ について2次摂動のエネルギーを求めよ。

(4) $|\Delta|\gg\varepsilon$ の場合は，(3) の摂動論は近似が悪くなる。とくに，$\varepsilon\to 0$ のとき，$\hat{V}$ による摂動はどのように扱うべきか説明せよ。