平成３０年度第２次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　入　試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページあります。
3. 試験時間は　９：００～１１：００　です。
4. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚

5. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

問題　1

次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^2(x-2)}\,dx$ を求めよ。

(2) 実数 s に対して，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ が収束する s の範囲を求めよ。また，

そのときの広義積分の値を求めよ。

(3) $a>0$ とし，$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq a^2\}$ とする。2 重積分

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

の値を求めよ。

$\boxed{\text{問題}\quad 2}$

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) A の行列式の値を求めよ。

(2) A の固有値をすべて求めよ。

(3) $P^T AP$ が対角行列となるような直交行列 P と $P^T AP$ を求めよ。ただし，P^T は P の転置行列である。

問題　3

A, B を位相空間とする。位相空間の部分集合 M に対して，$\overline{M}$ は M を含む最小の閉集合とする。A から B への写像 f に対して，B の任意の開集合 O の原像 $f^{-1}(O)$ が A の開集合となるとき，f は A から B への連続写像であるという。次の問いに答えよ。

(1) $x_0 \in A$，$M \subset A$ とする。$x_0 \in \overline{M}$ であるための必要十分条件は，x_0 を含む A の任意の開集合 O に対して $O \cap M \neq \emptyset$ が成り立つことである。これを証明せよ。ただし，$\emptyset$ は空集合である。

(2) f を A から B への連続写像とする。A の任意の部分集合 M に対して $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ が成り立つことを示せ。

(3) f を A から B への連続写像とする。A の任意の部分集合 M に対して $\overline{f(\overline{M})} = \overline{f(M)}$ が成り立つことを示せ。

問題　4

$\mathbb{R}$ を実数全体とし，$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ とする。(x,y)，　$(x',y') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ に対して，$x = x'$ であり $y - y'$ が整数であるとき，$(x,y) \sim (x',y')$ と定義する。$\sim$ に関する (x,y) を含む同値類を $[(x,y)]$ で表し，$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/_\sim = \{[(x,y)] \mid (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上の二項演算 $*$ を

$$(x,y) * (x',y') = (xx', y+y'), \quad (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

で定義する。このとき，$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ は $*$ に関して群になることを示せ。

(2) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を複素数の乗法に関する群とする。$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/_\sim$ 上の二項演算 $\circ$ を

$$[(x,y)] \circ [(x',y')] = [(xx', y+y')], \quad [(x,y)],[(x',y')] \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/_\sim$$

で定義する。このとき，$\circ$ に関して $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/_\sim$ は $\mathbb{C}^*$ と同型であることを示せ。ただし，$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は 0 を除く複素数全体を表す。

問題　5

$\mathbb{R}^3$ をユークリッド空間とし，$p \in \mathbb{R}^3$ とする。区間 (a,b) で定義された滑らかな曲線 $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ は，すべての $t \in (a,b)$ に対して，$\|\alpha'(t)\| \neq 0$ を満たすとする。$t_0 \in (a,b)$ とし，

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\|\, du$$

とする。$s = s(t)$ の逆関数を $t = t(s)$ とし，$\beta(s) = \alpha(t(s))$ とする。次の問いに答えよ。ただし，$\alpha'(t) = \dfrac{d\alpha}{dt}(t)$ で，$\|\cdot\|$ はベクトルの大きさを表す。

(1) 定義域のすべての s に対して，$\|\beta'(s)\| = 1$ であることを示せ。

(2) α のすべての接線が点 p を通るならば，α の像は直線または直線の一部分であることを示せ。

問題　6

xy 平面上の3点

$$(x_1, y_1) = (1, 1), \quad (x_2, y_2) = (2, 4), \quad (x_3, y_3) = (3, 8)$$

に対する近似曲線について，次の問いに答えよ。

(1) 近似誤差 $E_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}(ax_i + b - y_i)^2$ を最小にする直線 $y = ax + b$ の係数 a，b を求めよ。

(2) 近似誤差 $E_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}(c{x_i}^2 + d - y_i)^2$ を最小にする曲線 $y = cx^2 + d$ の係数 c，d を求めよ。