平成３０年度第１次募集（平成２９年１０月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験
一　般　入　試

材料生産システム専攻
機能材料科学コース（物性系）
B1

専　門　科　目　[材料科学（物性系）]

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，表紙を含めて６ページある。

3　解答は，４問中３問を選択し，解答用紙の指定された箇所に記入すること。

4　受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

5　解答時間は，180 分である。

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

［I］ 質量 m の相互作用のない自由な同種粒子２個からなる１次元系について，以下の設問（１）〜（７）に答えよ。ただし,（１）と（２）ではスピンを考慮しなくてよい。

（１）i 番目の粒子の位置を x_i，規格化された n 番目の１粒子波動関数を $u_n(x_i)$ とすると，$u_n(x_i)$ はシュレーディンガー方程式,

$$H_i u_n(x_i) = \epsilon_n u_n(x_i)$$

を満たす。ここで，H_i は i 番目の粒子のハミルトニアン，ϵ_n は１粒子のエネルギー固有値である。H_i を演算子として表せ。

（２）２粒子系のシュレーディンガー方程式は

$$(H_1 + H_2)\psi_{nl}(x_1, x_2) = E_{nl}\psi_{nl}(x_1, x_2)$$

である。２粒子波動関数 $\psi_{nl}(x_1, x_2) = u_n(x_1)u_l(x_2)$ が，このシュレーディンガー方程式の固有関数であることを示し，２粒子系のエネルギー固有値 E_{nl} を求めよ。

（３）i 番目の粒子のスピン変数を σ_i とし，x_i と σ_i を合わせて X_i とする。同種粒子は区別できないことから，粒子を入れ替えても状態は変わらない。これから，スピンを含む２粒子波動関数 $\Psi(X_1, X_2)$ は，粒子の入れ替えに対して，

$$\Psi(X_1, X_2) = \Psi(X_2, X_1) \quad \cdots(\mathrm{A})$$

あるいは,

$$\Psi(X_1, X_2) = -\Psi(X_2, X_1) \quad \cdots(\mathrm{B})$$

の対称性をもつことを示せ。

（４）前設問（３）の $\Psi(X_1, X_2)$ を，軌道部分 $\psi(x_1, x_2)$ とスピン部分 $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ に分けて,

$$\Psi(X_1, X_2) = \psi(x_1, x_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2)$$

とする。$\Psi(X_1, X_2)$ が (B) を満たし，かつ $\chi(\sigma_1, \sigma_2) = \chi(\sigma_2, \sigma_1)$ のとき，$\psi(x_1, x_2)$ は，粒子の入れ替えに対し対称か反対称か，理由と共に答えよ。

（５）設問（２）の ψ_{nl} は粒子の入れ替えに対する対称性を満たしていない。前設問（４）の対称性を満たす規格化された $\psi_{nl}(x_1, x_2)$ を書け。

（６）フェルミ粒子に対するパウリの排他原理を説明せよ。

（７）設問（３）の (A) または (B) を使って，パウリの排他原理が成り立つことを示せ。

[II]　磁気モーメント $-2\frac{\mu_B}{\hbar}\mathrm{s}$（s はスピン角運動量）を持つ N 個の独立な磁性イオン $(s=1/2)$ から成る量子系が，z 方向への磁場 B の中にあるとする。(μ_B はボーア磁子であり，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った定数である。)
このとき，それぞれの磁性イオンのハミルトニアンは $H=-B\left(-2\frac{\mu_B}{\hbar}s_z\right)=2B\frac{\mu_B}{\hbar}s_z$ によって与えられる。磁性イオン 1 つを量子力学によって取り扱うと，$s=1/2$ だから $s_z=-\hbar/2$ と $s_z=\hbar/2$ の 2 つの固有状態（$|-\frac{1}{2}\rangle$ と $|\frac{1}{2}\rangle$）が得られ，それぞれの固有エネルギーは $E_1=-\mu_B B$ と $E_2=\mu_B B$ によって与えられる。このため，温度 T における磁性イオン 1 つの分配関数 Z は，$Z=\exp\left(-\frac{\mu_B B\hbar}{k_B T}\right)+\exp\left(+\frac{\mu_B B}{k_B T}\right)$ によって与えられる。
以下の設問（1）〜（7）に答えよ。

（1）温度 T において，1 つの磁性イオンの状態が $|-\frac{1}{2}\rangle$ になる統計的確率 $P(-\frac{1}{2})$ と，$|\frac{1}{2}\rangle$ になる統計的確率 $P(\frac{1}{2})$ を求めよ。

（2）独立な磁性イオン N 個（以下，この系と呼ぶ）の分配関数 Z_N を求めよ。

（3）この系のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

（4）この系のエントロピー S を求めよ。

（5）熱力学第 3 法則とは何か答え，$B>0$ においてそれを満たしていることを示せ。ただし，$(1+x)^{-1}\sim 1-x$ や $\log(1+x)\sim x$ $(|x|<1)$ を用いてよい。

（6）温度 T の熱平衡状態において，磁化 $M=\sum_{i=1}^{N}\left(-2\frac{\mu_B}{\hbar}s_{i,z}\right)$ の熱平均値 $\langle M\rangle$ を（1）の結果を用いて求めよ。ここで $s_{i,z}$ は i 番目の磁性イオンのスピン角運動量の z 成分である。

（7）零磁場の極限でキュリーの法則（$B/\langle M\rangle$ が温度 T に比例する）が得られることを示せ。ただし，$\tanh x\sim x$ $(|x|<1)$ を用いてよい。

［Ⅲ］半導体に関する以下の設問（1）と（2）に答えよ。

（1）n形半導体について，以下の問①～⑤に答えよ。

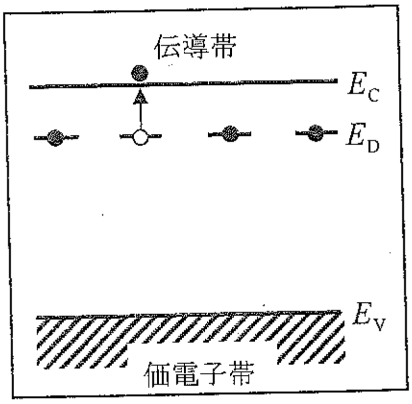

図1

① 図1は，ドナー不純物の半分未満がイオン化している場合のエネルギー帯図を表している。なお，E_C，E_VおよびE_Dはそれぞれ伝導帯下端，価電子帯上端およびドナー準位のエネルギーである。また，-●-，-○-および●は，それぞれ中性ドナー，イオン化したドナーおよび電子を，上向き矢印は電子の励起を表している。このとき，フェルミ準位エネルギーE_Fが禁制帯の中のどこに位置しているかを，一点鎖線（―・―・―・-）で解答用紙の図Aの中に描き，そのように表せる理由を述べよ。ただし，フェルミ準位エネルギーE_Fの書き込む位置が，$\dfrac{E_C+E_D}{2}$や$\dfrac{E_C+E_V}{2}$より上部なのか，下部なのか，等しい位置なのかが明確になるように描くこと。なお，等しいときは，「$\dfrac{E_C+E_D}{2}$に等しい」または「$\dfrac{E_C+E_V}{2}$に等しい」というコメントを図中に書き入れること。なお，電子と正孔の有効質量は等しいと仮定する。

② 図1のエネルギー帯図を参照して，解答欄の図Bの枠内に枯渇領域（出払い領域とも呼ぶ）の温度範囲におけるエネルギー帯図を描け。なお，価電子帯から伝導帯への電子の励起は無視できるものとする。

③ 前問②で描いた枯渇領域の温度範囲におけるエネルギー帯図の中に，フェルミ準位エネルギーE_Fは禁制帯のどこに位置しているかを一点鎖線（―・―・―・-）で書き表し，そのように書き表せる理由を述べよ。ただし，フェルミ準位エネルギーE_Fの書き込む位置が，$\dfrac{E_C+E_D}{2}$や$\dfrac{E_C+E_V}{2}$より上部なのか，下部なのか，等しい位置なのかが明確になるように描くこと。なお，等しいときは，「$\dfrac{E_C+E_D}{2}$に等しい」または「$\dfrac{E_C+E_V}{2}$に等しい」というコメントを図中に書き入れること。なお，電子と正孔の有効質量は等しいと仮定する。

④　前問③のときの電子濃度nを記せ。ここで，ドナー不純物濃度をN_Dとする。

⑤　前問③及び④の場合の枯渇領域の温度範囲よりも高温の領域においては，電子濃度が温度上昇に伴ってどのように変化するかを，その理由と共に答えよ。

（2）npn形トランジスタがベース接地された場合について，以下の問①～④に答えよ。なお，トランジスタは同一材料から形成されており，エミッタ，ベース及びコレクタのすべての領域で禁制帯幅は等しいものとする。

① npn形トランジスタの通常動作のバイアス電圧条件を，解答用紙の図Cに と の２つの直流電源の記号を書き加えて示せ。なお， は よりも大きな電圧を出力する電源とする。

②　エミッタ電流I_E，ベース電流I_B及びコレクタ電流I_Cのそれぞれの向きを，解答用紙の図CのI_E，I_B及びI_Cの流れる配線の隣に矢印を書き加えることにより示せ。

③　通常動作のバイアス電圧を印加した条件下でのエネルギー帯図を，伝導帯下端と価電子帯上端を実線で，フェルミ準位エネルギーを一点鎖線で表すことで示せ。ただし，左側をn形エミッタ領域，中央をp形ベース領域及び右側をn形コレクタ領域とし，各領域間の空乏層内でのフェルミ準位エネルギーは描かないものとする。

④　ベース領域の厚さを，電子の拡散距離に比較して十分に小さくする理由を説明せよ。

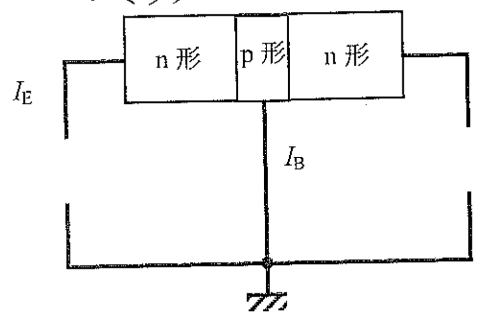

図２.ベース接地のnpn形トランジスタの概略図

[IV] 固体物性に関する以下の設問（1）と（2）に解答せよ。

（1）絶対零度における自由電子に関して，以下の問①～⑤に解答せよ。電子の質量はm，$\hbar=h/(2\pi)$（hはプランク定数)とする。

波動関数$\Psi(\boldsymbol{r})=A\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}]$は，１個の自由電子に対するシュレーディンガー方程式を満たす（$\boldsymbol{k}$は電子の波数ベクトル，$\boldsymbol{r}$は電子の位置ベクトル，Aは正の実数）。この電子が一辺の長さLの立方体に閉じ込められていることを(a)周期的境界条件で表すと，波数ベクトルは量子化される。また，(b)電子同士の相互作用を無視すると，上記の波動関数は全電子数がN個の自由電子からなる系にも適用できる。Nが十分大きい場合，(c) N個の自由電子は波数空間においてフェルミ球を構成する。

① 下線部(a)において，量子化された波数ベクトル$\boldsymbol{k}$のy成分k_yを求めよ。

② 下線部(b)の近似の名称を答えよ。

③ 下線部(c)において，フェルミ球の半径k_Fを，NとLを用いて求めよ。

④ 波数ベクトルが(k_x, k_y, k_z)で与えられるフェルミ球内の電子を考える。この電子の速度の各成分v_x, v_y, v_zを答えよ。

⑤ 前問④で明らかなように，フェルミ球内の電子のほとんどは，実空間で速度を持っている。しかし，外部から電圧を印加しない限り，電流は流れない。この理由を簡潔に述べよ。

（2）超伝導の磁気的性質について以下の問①および②に解答せよ。超伝導転移温度はT_cとする。

① シールディング効果とマイスナー効果の相違点を述べよ。

② 超伝導試料のシールディング効果とマイスナー効果を明らかにするため，磁化率の温度依存性を測定したい。どのような手順で行えばよいか。下記の解答例を参考に，(a)～(c)の記号を用いて答えよ。ただし，試料は温度 T_L（$< T_c$）まで下げることができ，T_cは室温よりも低いものとする。また，初期状態では，試料は室温にあり，磁場は印加されていない。

解答例：初期状態--->(a)--->(b)--->(c)---->(a)--->(b)---(c)

(a) 試料に弱い磁場（数Gauss程度）を印加する。

(b) 試料の温度をT_Lまで下げる。

(c) 試料の温度を室温まで上げる。