

平成30年度第1次募集（平成29年10月入学含む）  
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題  
外国人留学生特別入試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

## 専門科目（数学）

### 注意事項

1. この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は、表紙を含めて全部で7ページあります。
3. 試験時間は 9:00～11:00 です。
4. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。

問題冊子1部、解答用紙3枚、下書用紙2枚

5. 問題は全部で6題あります。そのうち3題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には、問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題 1

次の問いに答えよ。

- (1)  $\sin x$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$  の逆関数を  $\sin^{-1} x$  と表す。

等式  $\sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  が  $-1 < x < 1$  で成り立つような定数  $a_n$ のうち、 $a_0$  から  $a_5$  までを求めよ。

- (2)  $xyz$  空間内において、連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} \leq 1 \\ z \geq 1 \end{cases}$$

の表す図形の体積を求めよ。

問題 2

行列  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  に対して、次の問いに答えよ。

- (1) 行列  $A$  の固有値をすべて求めよ。
- (2)  $A$  の固有ベクトルで 3 次元数ベクトル空間  $\mathbb{R}^3$  の基底となるものを一組求めよ。
- (3)  $P^{-1}AP$  が対角行列となるような直交行列  $P$  と  $P^{-1}AP$  を一組求めよ。
- (4) 二次形式  $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$  を標準形にせよ。

問題 3

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  とし,  $\mathbb{T}$  上で定義された複素数値連続関数の全体を  $C(\mathbb{T})$  と表す.  $f, g \in C(\mathbb{T})$  に対して

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} f(z) \overline{g(z)} \frac{dz}{z}$$

と定め,  $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$  とおく.  $\alpha, \beta$  は異なる複素数で  $|\alpha|, |\beta| < 1$  であるとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 整数  $n$  に対して  $e_n(z) = z^n$  とするとき,  $\|e_n\|$  を求めよ. ただし,  $e_0(z) = 1$  とする.

(2)  $f_1(z) = \frac{1}{z - \alpha}$  とするとき,  $\|f_1\|$  を求めよ.

(3)  $f_2(z) = \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)}$  とするとき,  $\|f_2\|$  を求めよ.

問題 4

$G$  を位数 8 の有限群とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $G$  は位数 6 の部分群を含むかどうか理由をつけて答えよ。
- (2)  $G$  の自己同型写像  $f$  で、 $f \neq \text{id}_G$  となるものが存在することを証明せよ。ただし、 $\text{id}_G$  は  $G$  の恒等写像とする。
- (3)  $G$  はアーベル群でないと仮定する。このとき、 $G$  は位数 4 の正規部分群を含むことを証明せよ。

問題 5

3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の曲線  $\mathbf{p}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t)$  ( $-\infty < t < +\infty$ ) を  $C$  で表す。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C$  の点  $\mathbf{p}(0) = (0, 0, 0)$  における接触平面の方程式を求めよ。
- (2) 曲線  $C$  の曲率を求めよ。
- (3) 曲線  $C$  の捩率 (れいりつ) を求めよ。

## 問題 6

次の線形計画問題について考える。

$$\text{(LP)} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimize} & 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 \\ \text{(最小化)} & \\ \text{subject to} & x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ \text{(制約条件)} & 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 問題 (LP) の実行可能基底解をすべて求めよ。
- (2) 問題 (LP) の最適解と最小値を求めよ。
- (3) 問題 (LP) に対する双対問題 (D) を記述し、その実行可能解の領域を座標平面に図示して (2) の解答を検証せよ。