平成３０年度第１次募集（平成２９年１０月入学含む）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　入　試

数理物質科学専攻

数理科学

A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページあります。
3. 試験時間は　９：００～１１：００　です。
4. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚，下書用紙２枚

5. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題　1

次の問いに答えよ。

(1) $\sin x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\sin^{-1} x$ と表す。

等式　$\sin^{-1} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$　が　$-1 < x < 1$　で成り立つような定数 a_n のうち, a_0 から a_5 までを求めよ。

(2) xyz 空間内において, 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{2^2} + \dfrac{z^2}{3^2} \leqq 1 \\ z \geqq 1 \end{cases}$$

の表す図形の体積を求めよ。

問題　2

行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ。

(2) A の固有ベクトルで 3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底となるものを一組求めよ。

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P と $P^{-1}AP$ を一組求めよ。

(4) 二次形式 $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ を標準形にせよ。

問題 3

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ とし，$\mathbb{T}$ 上で定義された複素数値連続関数の全体を $C(\mathbb{T})$ と表す。$f, g \in C(\mathbb{T})$ に対して

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)} \frac{dz}{z}$$

と定め，$||f|| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ とおく。α, β は異なる複素数で $|\alpha|, |\beta| < 1$ であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 整数 n に対して $e_n(z) = z^n$ とするとき，$||e_n||$ を求めよ。ただし，$e_0(z) = 1$ とする。

(2) $f_1(z) = \dfrac{1}{z - \alpha}$ とするとき，$||f_1||$ を求めよ。

(3) $f_2(z) = \dfrac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)}$ とするとき，$||f_2||$ を求めよ。

問題　4

G を位数 8 の有限群とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) G は位数 6 の部分群を含むかどうか理由をつけて答えよ。

(2) G の自己同型写像 f で, $f \neq \mathrm{id}_G$ となるものが存在することを証明せよ。ただし, id_G は G の恒等写像とする。

(3) G はアーベル群でないと仮定する。このとき, G は位数 4 の正規部分群を含むことを証明せよ。

問題　5

3次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^3$内の曲線$\mathbf{p}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t)$ $(-\infty < t < +\infty)$をCで表す。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 曲線Cの点$\mathbf{p}(0) = (0,0,0)$における接触平面の方程式を求めよ。

(2) 曲線Cの曲率を求めよ。

(3) 曲線Cの捩率（れいりつ）を求めよ。

問題　6

次の線形計画問題について考える。

$$
(\mathrm{LP})\begin{cases}
\textbf{Minimize} & 2x_1+6x_2+4x_3+4x_4 \\
\textbf{（最小化）} & \\
\textbf{subject to} & x_1+3x_2-2x_3-2x_4=-1 \\
\textbf{（制約条件）} & 2x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\
 & x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0.
\end{cases}
$$

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 問題 (LP) の実行可能基底解をすべて求めよ。

(2) 問題 (LP) の最適解と最小値を求めよ。

(3) 問題 (LP) に対する双対問題 (D) を記述し，その実行可能解の領域を座標平面に図示して (2) の解答を検証せよ。