平成２９年度第２次募集
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題
一　般　入　試

数理物質科学専攻
数理科学
A3

専門科目（数学）

注意事項

1. この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子は，表紙を含めて全部で７ページあります。
3. 試験時間は　９：００～１１：００　です。
4. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。

   問題冊子１部，解答用紙３枚，下書用紙２枚

5. 問題は全部で６題あります。そのうち３題を選択して解答してください。
6. 各解答用紙には，問題番号と受験番号を記入してください。解答しない場合でも提出してください。
7. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は各自持ち帰ってください。

問題 1

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ。

(3) A^n を求めよ。ただし，n は正の整数である。

(4) 行列 $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ が対角化不可能となる実数 c の範囲を求めよ。

問題　2

(1) 関数 $f(x)$ を次の式で定義する。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(a) 0 以上の整数 n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ を証明せよ。

(b) $f(x)$ は，$x = 0$ で無限回微分可能であることを証明せよ。

(2) 広義積分に関する公式

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を証明せよ。

問題　3

第 1 象限において $y = f(x)$ で表される微分可能な曲線を C とする。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a, f(a))$ における接線は，x 軸および y 軸とそれぞれ点 Q，点 R で交差し，点 P は線分 QR を一定の比 2:1 で内分するものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(2)　曲線 C が点 $(1, 1)$ を通るとき，C の方程式を求めよ。

問題　4

C を複素数平面上の原点を中心とする単位円とする。C の要素に対して複素数としての積を考える。n を正の整数として，

$$C_n = \{x \in C \,|\, x^n = 1\}$$

とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C は可換群になることを証明せよ。

(2) C_n は位数 n の巡回群であることを証明せよ。

(3) 複素数 x, y に対して，$\theta(x, y)$ を $x\bar{y}$ の偏角とする。このとき，異なる $x \in C_n$ と $y \in C_n$ に対する $|\theta(x, y)|$ の最小値を求めよ。ただし，$\bar{y}$ は y の共役複素数を表す。

(4) C の有限部分群は巡回群であることを証明せよ。

問題　5

実ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ において，X の零ベクトルを $\mathbf{0}$，X の部分集合 B の内点全体を $\operatorname{int} B$ と表し，$\mathbf{0} \in \operatorname{int} B$ と仮定する。このような B に対して，X 上の関数を次のように定義する。

$$f_B(\boldsymbol{x}) = \inf\left\{ t > 0 \;\middle|\; \frac{\boldsymbol{x}}{t} \in B \right\}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $B = \{\boldsymbol{z} \in X \mid \|\boldsymbol{z}\| \leqq 1\}$ のとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in X$ に対して

$$f_B(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$$

が成り立つことを示せ。

(2) B が凸集合であるならば，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ に対して以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$f_B(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leqq f_B(\boldsymbol{x}) + f_B(\boldsymbol{y})$$

(3) B が $\mathbf{0} \in \operatorname{int} B$ を満たす凸集合であっても，

$$\{\boldsymbol{x} \in X \mid f_B(\boldsymbol{x}) = 0\} = \{\mathbf{0}\}$$

が成立しない B の例を与えよ。

問題　6

2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ から2個選んでそれらの一次結合でベクトル $\boldsymbol{b}$ を表す場合，その係数が正である表し方をすべて列挙せよ。

(2) 次の線形計画問題 **(LP)** の一つの最適解と最小値を求めよ。

$$
\textbf{(LP)} \begin{cases} \text{最小化} & 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \\ \text{制約条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} \\ & x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0, x_4 \geqq 0, x_5 \geqq 0 \end{cases}
$$

(3) (2) の問題 (LP) に対する双対問題 (D) を記述し，その実行可能解の領域を座標平面に図示して (2) の解答を検証せよ。